高考数学总复习精品资料

高中数学知识汇总

熟悉这些解题小结论，启迪解题思路、探求解题佳径，总结解题方法，防止解题易误点的产生，对提升高考数学成绩将会起到立竿见影的效果。

一、集合与简易逻辑

1.集合的元素具有无序性和互异性 .

2.对集合 A、B，$A\cap B=\varnothing$ 时，你是否注意到“极端”情况：$A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$；求集合的子集时是否注意到 $\varnothing$ 是任何集合的子集、$\varnothing$ 是任何非空集合的真子集 .

3.对于含有 n 个元素的有限集合 M，其子集、真子集、非空子集、非空真子集的个数依次为 2^n，2^n-1，2^n-1，2^n-2.

4.“交的补等于补的并，即 $C_U(A\cap B)=C_UA\cup C_UB$”；“并的补等于补的交，即 $C_U(A\cup B)=C_UA\cap C_UB$”.

5.判断命题的真假

关键是“抓住关联字词”；注意：“不‘或’即‘且’，不‘且’即‘或’” .

6.“或命题”的真假特点是“一真即真，要假全假”；“且命题”的真假特点是“一假即假，要真全真”；“非命题”的真假特点是“一真一假” .

7.四种命题中“‘逆’者‘交换’也”、“‘否’者‘否定’也” .

原命题等价于逆否命题，但原命题与逆命题、否命题都不等价 .反证法分为三步：假设、推矛、得果 .

注意：命题的否定是“命题的非命题，也就是‘条件不变，仅否定结论’所得命题”，但否命题是“既否定原命题的条件作为条件，又否定原命题的结论作为结论的所得命题” .

8.充要条件

二、函　数

1.指数式、对数式，

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\quad a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}},\quad a^{\log_a N}=N$$

$$a^b=N\Leftrightarrow \log_a N=b(a>0,a\neq 1,N>0),\ .$$

$$a^0=1,\quad \log_a 1=0,\quad \log_a a=1,\quad \lg 2+\lg 5=1,\quad \log_e x=\ln x,$$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},\ .\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b.$$

2.(1)映射是“‘全部射出’加‘一箭一雕’”；映射中第一个集合 A 中的元素必有像，但第二个集合 B 中的元素不一定有原像（A 中元素的像有且仅有下一个，但 B 中元素的原像可能没有，也可任意个）；函数是“非空数集上的映射”，其中“值域是映射中像集 B 的子集” .

(2)函数图像与 x 轴垂线至多一个公共点，但与 y 轴垂线的公共点可能没有，也可任意个.

(3)函数图像一定是坐标系中的曲线，但坐标系中的曲线不一定能成为函数图像.

(4)原函数与反函数有两个“交叉关系”：自变量与因变量、定义域与值域.求一个函数的反函数，分三步：逆解、交换、定域（确定原函数的值域，并作为反函数的定义域）.

注意：① $f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$，$f[f^{-1}(x)]=x$，$f^{-1}[f(x)]=x$，

但 $f[f^{-1}(x)]\neq f^{-1}[f(x)]$.

3.单调性和奇偶性

(1) 奇函数在关于原点对称的区间上若有单调性，则其单调性完全相同.

偶函数在关于原点对称的区间上若有单调性，则其单调性恰恰相反.

单调函数的反函数和原函数有相同的性；如果奇函数有反函数，那么其反函数一定还是奇函数.

注意：（1）确定函数的奇偶性，务必先判定函数定义域是否关于原点对称.确定函数奇偶性的常用方法有：定义法、图像法等等.

对于偶函数而言有：$f(-x)=f(x)=f(|x|)$.

（2）若奇函数定义域中有 0，则必有 $f(0)=0$. 即 $0\in f(x)$ 的定义域时，$f(0)=0$ 是 $f(x)$ 为奇函数的必要非充分条件.

（3）确定函数的单调性或单调区间，在解答题中常用：定义法（取值、作差、鉴定）、导数法；在选择、填空题中还有：数形结合法（图像法）、特殊值法等等.

(4) 复合函数的单调性特点是：“同性得增，增必同性；异性得减，减必异性”.

复合函数的奇偶性特点是：“内偶则偶，内奇同外”.

复合函数要考虑定义域的变化。（即复合有意义）

4. 对称性与周期性（以下结论要消化吸收，不可强记）

(1) 函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(-x)$ 的图像关于直线 $x=0$（y 轴）对称.

推广一：如果函数 $y=f(x)$ 对于一切 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(a+x)=f(b-x)$ 成立，那么 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$（由“x 和的一半 $x=\frac{(a+x)+(b-x)}{2}$ 确定”）对称.

推广二：函数 $y=f(a+x)$，$y=f(b-x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{b-a}{2}$（由 $a+x=b-x$ 确定）对称.

(2) 函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=-f(x)$ 的图像关于直线 $y=0$（x 轴）对称.

推广：函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=A-f(x)$ 的图像关于直线 $y=\frac{A}{2}$ 对称（由“y 和的一半 $y=\frac{[f(x)]+[A-f(x)]}{2}$ 确定”）.

(3) 函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=-f(-x)$ 的图像关于坐标原点中心对称.

推广：函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=m-f(n-x)$ 的图像关于点 $(\frac{n}{2},\frac{m}{2})$ 中心对称．

(4) 函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称．

推广：曲线 $f(x,y)=0$ 关于直线 $y=x+b$ 的对称曲线是 $f(y-b,x+b)=0$；

曲线 $f(x,y)=0$ 关于直线 $y=-x+b$ 的对称曲线是 $f(-y+b,-x+b)=0$．

(5) 曲线 $f(x,y)=0$ 绕原点逆时针旋转 90°，所得曲线是 $f(y,-x)=0$（逆时针横变再交换）．

特别：$y=f(x)$ 绕原点逆时针旋转 90°，得 $-x=f(y)$，若 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$，则得 $y=f^{-1}(-x)$．

曲线 $f(x,y)=0$ 绕原点顺时针旋转 90°，所得曲线是 $f(-y,x)=0$（顺时针纵变再交换）．

特别：$y=f(x)$ 绕原点顺时针旋转 90°，得 $x=f(-y)$，若 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$，则得 $y=-f^{-1}(x)$．

(6) 类比“三角函数图像”得：

如果 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的周期函数，且一个周期为 T，那么 $f(x\pm nT)=f(x)(n\in\mathbf{Z})$．

特别：若 $f(x+a)=-f(x)(a\neq0)$ 恒成立，则 $T=2a$．

若 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}(a\neq0)$ 恒成立，则 $T=2a$．若 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}(a\neq0)$ 恒成立，则 $T=2a$．

如果 $y=f(x)$ 是周期函数，那么 $y=f(x)$ 的定义域“无界”．

5. 图像变换

(1) 函数图像的平移和伸缩变换应注意哪些问题？

函数 $y=f(x)$ 的图像按向量 $\vec{a}=(k,h)$ 平移后，得函数 $y-h=f(x-k)$ 的图像．

(2) 函数图像的平移、伸缩变换中，图像的特殊点、特殊线也作相应的变换．

(3) 图像变换应重视将所研究函数与常见函数（正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数、对数函数、指数函数、三角函数、“鱼钩函数 $y=x+\frac{k}{x}$ $(k>0)$”及函数

$y=x+\frac{k}{x}$ $(k<0)$等）相互转化 .

注意：①形如 $y=ax^2+bx+c$ 的函数，不一定是二次函数 .

②应特别重视“二次三项式”、“二次方程”、“二次函数”、“二次曲线”之间的特别联系 .

③形如 $y=\frac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0,ad\neq bc)$ 的图像是等轴双曲线，双曲线两渐近线分别直线 $x=-\frac{d}{c}$（由分母为零确定）、直线 $y=\frac{a}{c}$（由分子、分母中 x 的系数确定），双曲线的中心是点 $(-\frac{d}{c},\frac{a}{c})$.

三、数　　列

1.数列的通项、数列项的项数，递推公式与递推数列，数列的通项与数列的前 n 项和公式的关系：$a_n=\begin{cases}S_1,(n=1)\\ S_n-S_{n-1},(n\geq 2)\end{cases}$（必要时请分类讨论）.

注意：$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$；

$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1$.

2.等差数列 $\{a_n\}$ 中：

（1）等差数列公差的取值与等差数列的单调性 .

（2）$a_n=a_1+(n-1)d=a_m+(n-m)d$；$p+q=m+n\Rightarrow a_p+a_q=a_m+a_n$.

(3) $\{a_{n_1+(k-1)m}\}$、$\{ka_n\}$ 也成等差数列 . (4) 两等差数列对应项和（差）组成的新数列仍成等差数列 .

(5) $a_1+a_2+\cdots+a_m,a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{k+m-1},\cdots$ 仍成等差数列 .

（6）$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，$S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$，

$a_n=\frac{S_{2n-1}}{2n-1}$，$\frac{A_n}{B_n}=f(n)\Rightarrow\frac{a_n}{b_n}=f(2n-1)$.

(7) $a_p=q,a_q=p(p\neq q)\Rightarrow a_{p+q}=0$；$S_p=q,S_q=p(p\neq q)\Rightarrow S_{p+q}=-(p+q)$；

$S_{m+n}=S_m+S_n+mnd$.

(8)“首正”的递减等差数列中，前 n 项和的最大值是所有非负项之和；
“首负”的递增等差数列中，前 n 项和的最小值是所有非正项之和；

(9) 有限等差数列中，奇数项和与偶数项和的存在必然联系，由数列的总项数是偶数还

是奇数决定．若总项数为偶数，则“偶数项和”－“奇数项和”＝总项数的一半与其公差的积；若总项数为奇数，则“奇数项和”－“偶数项和”＝此数列的中项．

（10）两数的等差中项惟一存在．在遇到三数或四数成等差数列时，常考虑选用“中项关系”转化求解．

(11)判定数列是否是等差数列的主要方法有：定义法、中项法、通项法、和式法、图像法(也就是说数列是等差数列的充要条件主要有这五种形式).

3.等比数列 $\{a_n\}$ 中：

（1）等比数列的符号特征(全正或全负或一正一负)，等比数列的首项、公比与等比数列的单调性．

（1）$a_n=a_1q^{n-1}=a_mq^{n-m}$；$p+q=m+n\Rightarrow b_p\cdot b_q=b_m\cdot b_n$．

(3) $\{|a_n|\}$、$\{a_{n_1+(k-1)m}\}$、$\{ka_n\}$ 成等比数列；$\{a_n\},\{b_n\}$ 成等比数列 $\Rightarrow\{a_nb_n\}$ 成等比数列．

(4) 两等比数列对应项积(商)组成的新数列仍成等比数列．

(5) $a_1+a_2+\cdots+a_m,a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{k+m-1},\cdots$ 成等比数列．

（6）$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1)\\ \dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq1)\end{cases}=\begin{cases}na_1 & (q=1)\\ -\dfrac{a_1}{1-q}q^n+\dfrac{a_1}{1-q} & (q\neq1)\end{cases}$．

特别：$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$．

(7) $S_{m+n}=S_m+q^mS_n=S_n+q^nS_m$．

(8)“首大于 1”的正值递减等比数列中，前 n 项积的最大值是所有大于或等于 1 的项的积；“首小于 1”的正值递增等比数列中，前 n 项积的最小值是所有小于或等于 1 的项的积；

(9) 有限等比数列中，奇数项和与偶数项和的存在必然联系，由数列的总项数是偶数还是奇数决定．若总项数为偶数，则“偶数项和”＝“奇数项和”与“公比”的积；若总项数为奇数，则“奇数项和”＝“首项”加上“公比”与“偶数项和”积的和．

（10）并非任何两数总有等比中项．仅当实数 a,b 同号时，实数 a,b 存在等比中项．对同号两实数 a,b 的等比中项不仅存在，而且有一对 $G=\pm\sqrt{ab}$．也就是说，两实数要么没有等比中项(非同号时)，如果有，必有一对(同号时)．在遇到三数或四数成等差数列时，常优先考虑选用“中项关系”转化求解．

(11)判定数列是否是等比数列的方法主要有：定义法、中项法、通项法、和式法(也就是说数列是等比数列的充要条件主要有这四种形式).

4. 等差数列与等比数列的联系

(1)如果数列 $\{a_n\}$ 成等差数列，那么数列 $\{A^{a_n}\}$ (A^{a_n} 总有意义)必成等比数列．

(2)如果数列 $\{a_n\}$ 成等比数列，那么数列 $\{\log_a|a_n|\}(a>0,a\neq1)$ 必成等差数列．

(3)如果数列 $\{a_n\}$ 既成等差数列又成等比数列，那么数列 $\{a_n\}$ 是非零常数数列；但数列 $\{a_n\}$ 是常数数列仅是数列既成等差数列又成等比数列的必要非充分条件.

(4)如果两等差数列有公共项，那么由他们的公共项顺次组成的新数列也是等差数列，且新等差数列的公差是原两等差数列公差的最小公倍数.

如果一个等差数列与一个等比数列有公共项顺次组成新数列，那么常选用"由特殊到一般的方法"进行研讨，且以其等比数列的项为主，探求等比数列中那些项是他们的公共项，并构成新的数列.

注意：(1)公共项仅是公共的项，其项数不一定相同，即研究 $a_n=b_m$.但也有少数问题中研究 $a_n=b_n$，这时既要求项相同，也要求项数相同.(2)三(四)个数成等差(比)的中项转化和通项转化法.

5.数列求和的常用方法：

（1）公式法：①等差数列求和公式（三种形式），②等比数列求和公式（三种形式），

③ $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$，$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$，

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$，$1+3+5+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$.

（2）分组求和法：在直接运用公式法求和有困难时，常将"和式"中"同类项"先合并在一起，再运用公式法求和.

（3）倒序相加法：在数列求和中，若和式中到首尾距离相等的两项和有其共性或数列的通项与组合数相关联，则常可考虑选用倒序相加法，发挥其共性的作用求和（这也是等差数列前 n 和公式的推导方法）.

（4）错位相减法：如果数列的通项是由一个等差数列的通项与一个等比数列的通项相乘构成，那么常选用错位相减法，将其和转化为"一个新的的等比数列的和"求解（注意：一般错位相减后，其中"新等比数列的项数是原数列的项数减一的差"！）（这也是等比数列前 n 和公式的推导方法之一）.

（5）裂项相消法：如果数列的通项可"分裂成两项差"的形式，且相邻项分裂后相关联，那么常选用裂项相消法求和.常用裂项形式有：

① $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，② $\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$，

③ $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1})$，

$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{(k+1)k}<\frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$，

④ $\frac{1}{n(n-1)(n+2)}=\frac{1}{2}[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$，⑤ $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$，

⑥ $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$，

⑦ $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$，⑧ $C_n^{m-1}+C_n^m=C_{n+1}^m\Rightarrow C_n^m=C_{n+1}^m-C_n^{m-1}$.

特别声明： 运用等比数列求和公式，务必检查其公比与 1 的关系，必要时分类讨论 .

（6）通项转换法。

6. 分期付款型应用问题

(1) 重视将这类应用题与等差数列或等比数列相联系 .

(2) 若应用问题像“森林木材问题”那样，既增长又砍伐，则 常选用“统一法”统一到“最后”解决 .

(3)“分期付款”、“森林木材”等问题的解决过程中，务必“卡手指”，细心计算“年限”作为相应的“指数” .

四、三角函数

1. α 终边与 θ 终边相同 (α 的终边在 θ 终边所在射线上) $\Leftrightarrow$ $\alpha=\theta+2k\pi\ (k\in Z)$.

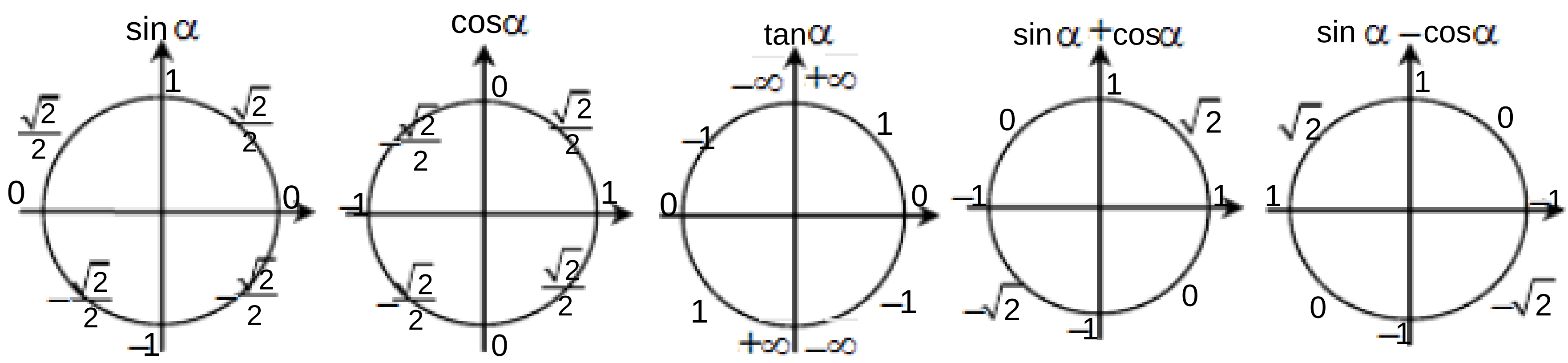
α 终边与 θ 终边共线 (α 的终边在 θ 终边所在直线上) $\Leftrightarrow$.

α 终边与 θ 终边关于 x 轴对称 $\Leftrightarrow$ $\alpha=-\theta+2k\pi\ (k\in Z)$.

α 终边与 θ 终边关于 y 轴对称 $\Leftrightarrow$ $\alpha=\pi-\theta+2k\pi\ (k\in Z)$.

α 终边与 θ 终边关于原点对称 $\Leftrightarrow$ $\alpha=\pi+\theta+2k\pi\ (k\in Z)$.

一般地： α 终边与 θ 终边关于角 β 的终边对称 $\Leftrightarrow$ $\alpha=2\beta-\theta+2k\pi\ (k\in Z)$.



α 与 $\dfrac{\alpha}{2}$ 的终边关系由“两等分各象限、一二三四”确定 .

2. 弧长公式： $l=|\alpha|R$，扇形面积公式： $S=\dfrac{1}{2}lR=\dfrac{1}{2}|\alpha|R^2$， 1 弧度 (1rad) $\approx 57.3^\circ$.

3. 三角函数符号特征是： 一是全正、二正弦正、三是切正、四余弦正 .

注意： $\sin 15^\circ=\cos 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin 75^\circ=\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

$\tan 15^\circ=\cot 75^\circ=2-\sqrt{3}$, $\tan 75^\circ=\cot 15^\circ=2+\sqrt{3}$， $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

4. 三角函数线的特征 是：正弦线“站在 x 轴上 (起点在 x 轴上) ”、余弦线“躺在 x 轴上 (起点是原点) ”、正切线“站在点 A(1,0) 处(起点是 A) ”. 务必重视“三角函数值的大小与单位圆上相应点的坐标之间的关系，‘正弦’ $\Leftrightarrow$ ‘纵坐标’、‘余弦’ $\Leftrightarrow$ ‘横坐标’、‘正切’ $\Leftrightarrow$ ‘纵坐标除以横坐标之商’ ”;务必记住 :单位圆中角终边的变化与 $\sin\alpha\pm\cos\alpha$ 值的大小变化的关系 . α 为锐角 $\Rightarrow$ $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

5. 三角函数同角关系中，平方关系的运用中，务必重视“根据已知角的范围和三角函数的取值，精确确定角的范围，并进行定号”；

6. 三角函数诱导公式的本质是：奇变偶不变，符号看象限.

7. 三角函数变换主要是：角、函数名、次数、系数(常值)的变换，其核心是“角的变换”!

角的变换主要有：已知角与特殊角的变换、已知角与目标角的变换、角与其倍角的变换、两角与其和差角的变换.

如 $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta=(\alpha-\beta)+\beta$，$2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$，$2\alpha=(\beta+\alpha)-(\beta-\alpha)$

$\alpha+\beta=2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}$，$\frac{\alpha+\beta}{2}=(\alpha-\frac{\beta}{2})-(\frac{\alpha}{2}-\beta)$等.

常值变换主要指“1”的变换：

$1=\sin^2x+\cos^2x=\sec^2x-\tan^2x=\tan x\cdot\cot x=\tan\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{2}=\cos 0=\cdots$ 等.

三角式变换主要有：三角函数名互化(切割化弦)、三角函数次数的降升(降次、升次)、运算结构的转化(和式与积式的互化). 解题时本着“三看”的基本原则来进行：“看角、看函数、看特征”，基本的技巧有：巧变角，公式变形使用，化切割为弦，用倍角公式将高次降次.

注意：和(差)角的函数结构与符号特征；余弦倍角公式的三种形式选用；降次(升次)公式中的符号特征.“正余弦‘三兄妹—$\sin x\pm\cos x$、$\sin x\cos x$’的内存联系”(常和三角换元法联系在一起 $t=\sin x\pm\cos x$

$\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$,$\sin x\cos x=$__________).

辅助角公式中辅助角的确定：$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$(其中 θ 角所在的象限由 a，b 的符号确定，θ 角的值由 $\tan\theta=\frac{b}{a}$ 确定)在求最值、化简时起着重要作用.尤其是两者系数绝对值之比为 1或$\sqrt{3}$ 的情形. $A\sin x+B\cos x=C$ 有实数解 $\Leftrightarrow$ $A^2+B^2\ge C^2$.

8. 三角函数性质、图像及其变换：

(1) 三角函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、有界性和周期性

注意：正切函数、余切函数的定义域；绝对值对三角函数周期性的影响：一般说来，某一周期函数解析式加绝对值或平方，其周期性是：弦减半、切不变．既为周期函数又是偶函数的函数自变量加绝对值，其周期性不变；其他不定．如 $y=\sin^2x, y=|\sin x|$ 的周期都是 π，

但 $y=|\sin x|+|\cos x|$ $y=|\sin x|+|\cos x|$ 的周期为 $\pi/2$，y=|tanx|的周期不变，问函数

y=cos|x|, $y=\sin x^2, y=\sin|x|, y=\cos\sqrt{x}$，y=cos|x|是周期函数吗？

(2) 三角函数图像及其几何性质：

(3) 三角函数图像的变换：两轴方向的平移、伸缩及其向量的平移变换.

(4) 三角函数图像的作法：三角函数线法、五点法(五点横坐标成等差数列)和变换法.

9. 三角形中的三角函数：

(1) 内角和定理：三角形三角和为 π，任意两角和与第三个角总互补，任意两半角和与第三个角的半角总互余.锐角三角形 $\Leftrightarrow$ 三内角都是锐角 $\Leftrightarrow$ 三内角的余弦值为正值 $\Leftrightarrow$ 任两

角和都是钝角 $\Leftrightarrow$ 任意两边的平方和大于第三边的平方 .

(2) 正弦定理 ： $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ (R 为三角形外接圆的半径).

注意： 已知三角形两边一对角， 求解三角形时，若运用正弦定理， 则务必注意可能有两解.

(3) 余弦定理 ： $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}-1$ 等，常选用余弦定理鉴定三角形的类型 .

(4) 面积公式： $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4R}$.

五、向 量

1. 向量运算的几何形式和坐标形式， 请注意 ：向量运算中向量起点、 终点及其坐标的特征.

2. 几个概念：零向量、单位向量 (与 $\overrightarrow{AB}$ 共线的单位向量是 $\pm\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ ，特别：$(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})\perp(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}-\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})$)、平行 (共线) 向量 (无传递性，是因为有 $\vec{0}$)、相等向量 (有传递性)、相反向量 、向量垂直 、以及 一个向量在另一向量方向上的投影 ($\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影是 $=|\vec{a}|\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\in\mathbf{R}$).

3. 两非零向量平行 (共线) 的充要条件 $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=(|\vec{a}||\vec{b}|)^2$ $\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

两个非零向量垂直的充要条件 $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ $\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

特别：零向量和任何向量共线 . $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ 是向量平行的充分不必要条件 !

4. 平面向量的基本定理 ：如果 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对该平面内的任一向量 $\mathbf{a}$，有且只有一对实数 λ_1 、 λ_2 ，使 $\mathbf{a}=\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2$.

5. 三点 A、 B、 C 共线 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 共线 ;

向量 $\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$ 中三终点 A、 B、 C 共线 $\Leftrightarrow$ 存在实数 α、β 使得：$\overrightarrow{PA}=\alpha\overrightarrow{PB}+\beta\overrightarrow{PC}$ 且 $\alpha+\beta=1$.

6. 向量的数量积： $|\vec{a}|^2=(\vec{a})^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$， $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2$,

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}},$$

$$\vec{a}\text{在}\vec{b}\text{上的投影}=|\vec{a}|\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

注意：$<\vec{a},\vec{b}>$ 为锐角 $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ 且 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 不同向；

$<\vec{a},\vec{b}>$ 为直角 $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 且 $\vec{a}$、$\vec{b}\neq\vec{0}$；

$<\vec{a},\vec{b}>$ 为钝角 $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$ 且 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 不反向

$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$ 是 $<\vec{a},\vec{b}>$ 为钝角的必要非充分条件 .

向量运算和实数运算有类似的地方也有区别： 一个封闭图形首尾连接而成的向量和为零向量，这是题目中的天然条件 ，要注意运用；对于一个向量等式，可以移项，两边平方、两边同乘以一个实数， 两边同时取模， 两边同乘以一个向量，但不能两边同除以一个向量，即两边不能约去一个向量；向量的“乘法”不满足结合律，即 $\vec{a}(\vec{b}\bullet\vec{c})\neq(\vec{a}\bullet\vec{b})\vec{c}$，切记两向量不能相除（相约）.

7. $||\vec{a}|-|\vec{b}||\le|\vec{a}\pm\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$

注意：$\vec{a}$、$\vec{b}$ 同向或有 $\vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|\geq||\vec{a}|-|\vec{b}||=|\vec{a}-\vec{b}|$；

$\vec{a}$、$\vec{b}$ 反向或有 $\vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|\geq||\vec{a}|-|\vec{b}||=|\vec{a}+\vec{b}|$；

$\vec{a}$、$\vec{b}$ 不共线 $\Leftrightarrow$ $||\vec{a}|-|\vec{b}||<|\vec{a}\pm\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$.（这些和实数集中类似 ）

与 $\overrightarrow{AB}$ 共线的单位向量是 $\pm\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$.

$\overrightarrow{PG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\Leftrightarrow$ G 为 ΔABC 的重心；

特别 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}\Leftrightarrow$ P 为 ΔABC 的重心 .

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}\Leftrightarrow$ P 为 ΔABC 的垂心；

$\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})(\lambda\neq0)$ 所在直线过 ΔABC 的内心（是 $\angle BAC$ 的角平分线所在直线 ）；

$|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{PC}+|\overrightarrow{BC}|\overrightarrow{PA}+|\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{PB}=\vec{0}\Leftrightarrow$ P ΔABC 的内心 .

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}.$$

六、不等式

1.(1) 解不等式是求不等式的解集，最后务必有集合的形式表示；不等式解集的端点值往往是不等式对应方程的根或不等式有意义范围的端点值.

(2) 解分式不等式 $\frac{f(x)}{g(x)}>a(a\neq 0)$ 的一般解题思路是什么？（移项通分，分子分母分解因式，x 的系数变为正值，标根及奇穿过偶弹回）；

(3) 含有两个绝对值的不等式如何去绝对值？(一般是根据定义分类讨论、平方转化或换元转化)；

(4) 解含参不等式常分类等价转化，必要时需分类讨论.注意：按参数讨论，最后按参数取值分别说明其解集，但若按未知数讨论，最后应求并集.

2. 利用重要不等式 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ 以及变式 $ab\leq(\frac{a+b}{2})^2$ 等求函数的最值时，务必注意 a，b$\in \mathbf{R}^+$（或 a，b 非负），且“等号成立”时的条件是积 ab 或和 a＋b 其中之一应是定值 (一正二定三等四同时).

3.常用不等式有：$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ (根据目标不等式左右的运算结构选用) a、b、c$\in\mathbf{R}$，$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$（当且仅当 $a=b=c$ 时，取等号）

4.比较大小的方法和证明不等式的方法主要有：差比较法、商比较法、函数性质法、综合法、分析法和放缩法 (注意：对“整式、分式、绝对值不等式”的放缩途径，“配方、函数单调性等”对放缩的影响).

5. 含绝对值不等式的性质：

a、b 同号或有 $0\Leftrightarrow |a+b|=|a|+|b|\geq||a|-|b||=|a-b|$；

a、b 异号或有 $0\Leftrightarrow |a-b|=|a|+|b|\geq||a|-|b||=|a+b|$.

注意：不等式恒成立问题的常规处理方式？（常应用方程函数思想和“分离变量法”转化为最值问题）.

七、直线和圆

1. 直线倾斜角与斜率的存在性及其取值范围；直线方向向量的意义（$\vec{a}=\lambda(1,k)$ 或 $\lambda(0,1)(\lambda\neq 0)$）及其直线方程的向量式（$(x-x_0,y-y_0)=\lambda\vec{a}$（$\vec{a}$ 为直线的方向向量））.应用直线方程的点斜式、斜截式设直线方程时，一般可设直线的斜率为 k，但你是否注意到直线垂直于 x 轴时，即斜率 k 不存在的情况？

2.知直线纵截距 b，常设其方程为 $y=kx+b$ 或 $x=0$；知直线横截距 x_0，常设其方程为 $x=my+x_0$ (直线斜率 k 存在时，m 为 k 的倒数) 或 $y=0$.知直线过点 (x_0,y_0)，常设其方程为 $y=k(x-x_0)+y_0$ 或 $x=x_0$.

注意：(1) 直线方程的几种形式：点斜式、斜截式、两点式、截矩式、一般式、向量式．以

及各种形式的局限性．(如点斜式不适用于斜率不存在的直线，还有截矩式呢？)

与直线 $l: Ax+By+C=0$ 平行 的直线可表示为 $Ax+By+C_1=0$；

与直线 $l: Ax+By+C=0$ 垂直 的直线可表示为 $Bx-Ay+C_1=0$；

过点 $P(x_0, y_0)$ 与直线 $l: Ax+By+C=0$ 平行 的直线可表示为：

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$；

过点 $P(x_0, y_0)$ 与直线 $l: Ax+By+C=0$ 垂直 的直线可表示为：

$B(x-x_0)-A(y-y_0)=0$.

(2)直线在坐标轴上的截距 可正、可负、也可为 0.直线两截距相等 $\Leftrightarrow$ 直线的斜率为 -1 或直线过原点；直线两截距互为相反数 $\Leftrightarrow$ 直线的斜率为 1 或直线过原点；直线两截距绝对值相等 $\Leftrightarrow$ 直线的斜率为 ± 1 或直线过原点．

(3)在解析几何中，研究两条直线的位置关系时，有可能这两条直线重合，而在立体几何中一般提到的两条直线可以理解为它们不重合．

3.相交两直线的夹角和两直线间的到角是两个不同的概念：夹角特指相交两直线所成的较小角，范围是 $(0, \frac{\pi}{2}]$，而其到角是带有方向的角，范围是 $(0, \pi)$.相应的公式是：夹角公式 $\tan\theta = \left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right| = \left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|$，直线 l_1 到 l_2 角公式 $\tan\theta = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} = \frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$.注：点到直线的距离公式 $d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

特别：$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$($k_1$、$k_2$都存在时) $\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$；

$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1=k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$($k_1$、$k_2$都存在时) $\Leftrightarrow \begin{cases} A_1B_2=A_2B_1 \\ A_1C_2 \neq A_2C_1 \end{cases}$；

l_1、l_2重合 $\Leftrightarrow \begin{cases} k_1=k_2 \\ b_1=b_2 \end{cases}$($k_1$、$k_2$都存在时) $\Leftrightarrow \begin{cases} A_1B_2=A_2B_1 \\ A_1C_2=A_2C_1 \text{或} B_1C_2=B_2C_1 \end{cases}$.

4.线性规划中几个概念：约束条件、可行解、可行域、目标函数、最优解．

5.圆的方程：最简方程 $x^2+y^2=R^2$；

标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$；

一般式方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$；

参数方程 $\begin{cases} x=R\cos\theta \\ y=R\sin\theta \end{cases}$($\theta$ 为参数)；

直径式方程 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

注意：(1)在圆的一般式方程中，圆心坐标和半径分别是

$(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}), R=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$.

(2)圆的参数方程为“三角换元”提供了样板，常用三角换元有：

$x^2+y^2=1\to x=\cos\theta, y=\sin\theta$,

$x^2+y^2=2\to x=\sqrt{2}\cos\theta, y=\sqrt{2}\sin\theta$,

$x^2+y^2\le 1\to x=r\cos\theta, y=r\sin\theta(0\le r\le 1)$,

$x^2+y^2\le 2\to x=r\cos\theta, y=r\sin\theta(0\le r\le\sqrt{2})$.

6.解决直线与圆的关系问题有“函数方程思想”和“数形结合思想”两种思路，等价转化求解，重要的是发挥“圆的平面几何性质 (如半径、半弦长、弦心距构成直角三角形，切线长定理、割线定理、弦切角定理等等)的作用！”

(1)过圆 $x^2+y^2=R^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 圆的切线方程是：$xx_0+yy_0=R^2$,

过圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 圆的切线方程是：

$(x-a)(x_0-a)+(y-a)(y_0-a)=R^2$,

过圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(D^2+E^2-4F>0)$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 圆的切线方程是：

$xx_0+yy_0+\frac{D}{2}(x+x_0)+\frac{E}{2}(y+y_0)+F=0$.

如果点 $P(x_0,y_0)$ 在圆外，那么上述直线方程表示过点 P 两切线上两切点的“切点弦”方程.

如果点 $P(x_0,y_0)$ 在圆内，那么上述直线方程表示与圆相离且垂直于 O_1P (O_1 为圆心)的直线方程，$|O_1P|\cdot d=R^2$ (d 为圆心 O_1 到直线的距离).

7.曲线 $C_1: f(x,y)=0$ 与 $C_2: g(x,y)=0$ 的交点坐标 $\Leftrightarrow$ 方程组 $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ 的解；

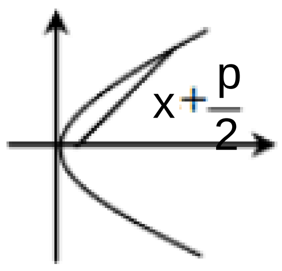
过两圆 $C_1: f(x,y)=0$、$C_2: g(x,y)=0$ 交点的圆 (公共弦)系为 $f(x,y)+\lambda g(x,y)=0$，当且仅当无平方项时，$f(x,y)+\lambda g(x,y)=0$ 为两圆公共弦所在直线方程 .

八、圆锥曲线

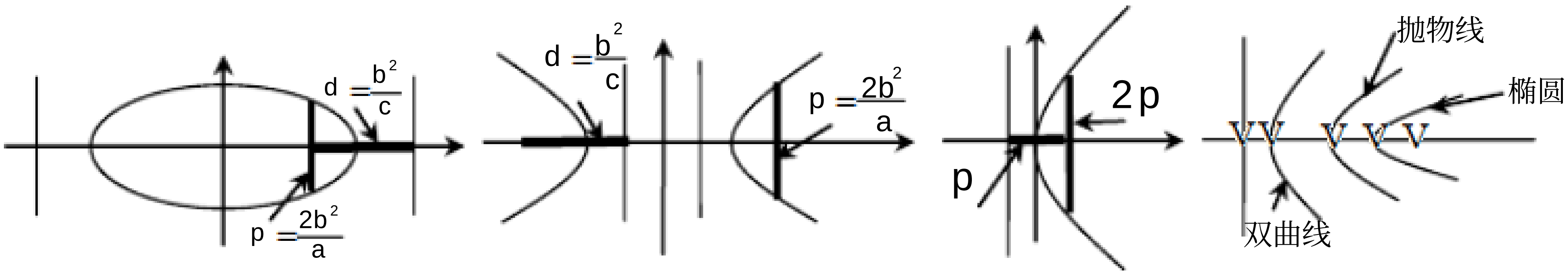
1.圆锥曲线的两个定义 ，及其“括号”内的限制条件，在圆锥曲线问题中，如果涉及到其两焦点 (两相异定点)，那么将优先选用圆锥曲线第一定义；如果涉及到其焦点、准线 (一定点和不过该点的一定直线)或离心率，那么将优先选用圆锥曲线第二定义；涉及到焦点三角形的问题，也要重视焦半径和三角形中正余弦定理等几何性质的应用 .

(1)注意 ：①圆锥曲线第一定义与配方法的综合运用；②圆锥曲线第二定义是：“点点距为分子、点线距为分母 ”，椭圆 $\Leftrightarrow$ 点点距除以点线距商是小于 1 的正数，双曲线 $\Leftrightarrow$ 点点距除以点线距商是大于 1 的正数，抛物线 $\Leftrightarrow$ 点点距除以点线距商是等于 1. ③圆锥曲线的

焦半径公式如下图：



2.圆锥曲线的几何性质：圆锥曲线的对称性、圆锥曲线的范围、圆锥曲线的特殊点线、圆锥曲线的变化趋势 .其中 $e=\frac{c}{a}$，椭圆中 $\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}$ 、双曲线中 $\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$.重视“特征直角三角形、焦半径的最值、焦点弦的最值及其‘顶点、焦点、准线等相互之间与坐标系无关的几何性质’”，尤其是双曲线中焦半径最值、焦点弦最值的特点 .注意：等轴双曲线的意义和性质 .



3. 在直线与圆锥曲线的位置关系问题中，有“函数方程思想”和“数形结合思想”两种思路，等价转化求解 . 特别是：

①直线与圆锥曲线相交的必要条件是他们构成的方程组有实数解，当出现一元二次方程时，务必“判别式≥ 0”，尤其是在应用韦达定理解决问题时，必须先有“判别式≥ 0”.

②直线与抛物线 (相交不一定交于两点)、双曲线位置关系 (相交的四种情况) 的特殊性，应谨慎处理 .

③在直线与圆锥曲线的位置关系问题中，常与“弦”相关，“平行弦”问题的关键是“斜率”、“中点弦”问题关键是“韦达定理”或“小小直角三角形”或“点差法”、“长度 (弦长)”问题关键是长度 (弦长) 公式

$$(|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\ ,\ |AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|}\ ,$$

$$|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\frac{\sqrt{\Delta_y}}{|a|}\,)$$ 或“小小直角三角形” .

④如果在一条直线上出现“三个或三个以上的点”，那么可选择应用“斜率”为桥梁转化.

4. 要重视常见的寻求曲线方程的方法 (待定系数法、定义法、直译法、代点法、参数法、交轨法、向量法等)，以及如何利用曲线的方程讨论曲线的几何性质 (定义法、几何法、代数法、方程函数思想、数形结合思想、分类讨论思想和等价转化思想等)，这是解析几何的两类基本问题，也是解析几何的基本出发点 .

注意：①如果问题中涉及到平面向量知识，那么应从已知向量的特点出发，考虑选择向量的几何形式进行“摘帽子或脱靴子”转化，还是选择向量的代数形式进行“摘帽子或脱靴子”转化 .

②曲线与曲线方程、轨迹与轨迹方程是两个不同的概念，寻求轨迹或轨迹方程时应注意轨迹上特殊点对轨迹的“完备性与纯粹性”的影响 .

③在与圆锥曲线相关的综合题中，常借助于“平面几何性质”数形结合 (如角平分线的

双重身份)、“方程与函数性质”化解析几何问题为代数问题、“分类讨论思想”化整为零分化处理、“求值构造等式、求变量范围构造不等关系”等等.

九、直线、平面、简单多面体

1.计算异面直线所成角的关键是平移（补形）转化为两直线的夹角，或建立空间坐标系转化为空间向量的夹角计算

$(|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a})^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$、$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2)$、

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$、$\lambda\vec{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)(\lambda\in R)$、

$\vec{a}//\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})\Leftrightarrow x_1=\lambda x_2,y_1=\lambda y_2,z_1=\lambda z_2,(\lambda\in R)$，

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

特别：$A=(x_1,y_1,z_1)$，$B=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

$$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}，$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(\overrightarrow{AB})^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

2.计算直线与平面所成的角关键是作面的垂线找射影，或向量法(直线上向量与平面法向量夹角的余角)，三余弦公式(最小角定理，$\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2$)，或先运用等积法求点到直线的距离，后虚拟直角三角形求解.注：一斜线与平面上以斜足为顶点的角的两边所成角相等 $\Rightarrow$ 斜线在平面上射影为角的平分线.

3.计算二面角的大小主要有：定义法(先作其平面角后计算大小)、公式法($\cos\theta=\frac{S_{影}}{S_{原}}$)、向量法(两平面法向量的夹角)、等价转换法等等.二面角平面角的主要作法有：定义法(取点、作垂、构角)、三垂线法(两垂一连，关键是第一垂(过二面角一个面内一点，作另一个面的垂线))、垂面法.

4.计算空间距离的主要方法有：定义法(先作垂线段后计算)、等积法、转换法(平行换点、换面)等.

5.空间平行垂直关系的证明，主要依据相关定义、公理、定理和空间向量进行，模式是：线线关系 $\lor$ 线面关系 $\lor$ 面面关系，请重视线面平行关系、线面垂直关系(三垂线定理及其逆定理)的桥梁作用.注意：书写证明过程需规范.

特别声明：①证明计算过程中，若有“中点”等特殊点线，则常借助于“中位线、重心”等知识转化.

②在证明计算过程中常将运用转化思想，将具体问题转化(构造)为特殊几何体(如三棱锥、正方体、长方体、三棱柱、四棱柱等)中问题，并获得去解决.

③如果根据已知条件，在几何体中有“三条直线两两垂直”，那么往往以此为基础，建

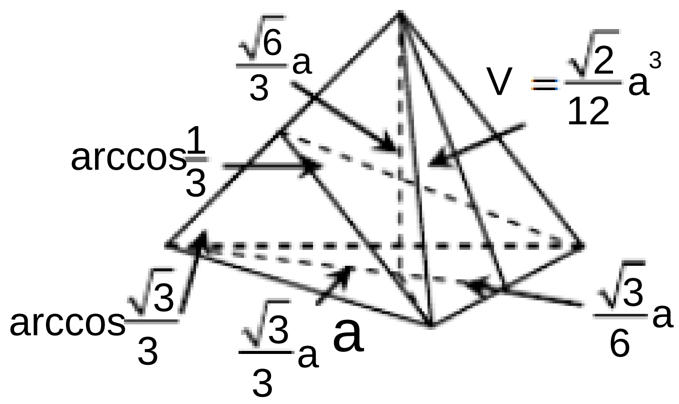
立空间直角坐标系，并运用空间向量解决问题 .

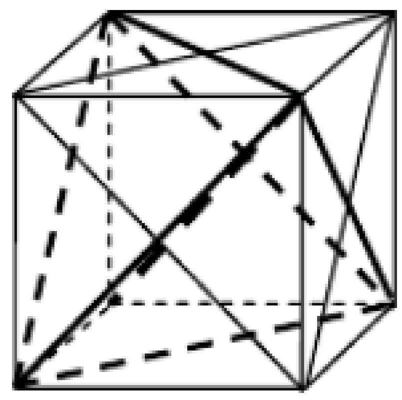
6.直棱柱、正棱柱、平行六面体、长方体、正方体、正四面体、棱锥、正棱锥关于侧棱、侧面、对角面、平行于底的截面的几何体性质 .

如长方体中：对角线长 $l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，棱长总和为 $4(a+b+c)$，全（表）面积为 $2(ab+bc+ca)$，（结合 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ 可得关于他们的等量关系，结合基本不等式还可建立关于他们的不等关系式），$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2(1)$；

如三棱锥中：侧棱长相等（侧棱与底面所成角相等）$\Leftrightarrow$ 顶点在底上射影为底面外心，侧棱两两垂直（两对对棱垂直）$\Leftrightarrow$ 顶点在底上射影为底面垂心，斜高长相等（侧面与底面所成相等）且顶点在底上在底面内 $\Leftrightarrow$ 顶点在底上射影为底面内心 .

如正四面体和正方体中：





7.求几何体体积的常规方法是：公式法、割补法、等积（转换）法、比例（性质转换）法等 .
注意：补形：三棱锥 $\Rightarrow$ 三棱柱 $\Rightarrow$ 平行六面体　　分割：三棱柱中三棱锥、四三棱锥、三棱柱的体积关系是 ________.

8.多面体是由若干个多边形围成的几何体．棱柱和棱锥是特殊的多面体.

正多面体的每个面都是相同边数的正多边形，以每个顶点为其一端都有相同数目的棱，这样的多面体只有五种，即正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体.

关于多面体的概念间有如下关系：

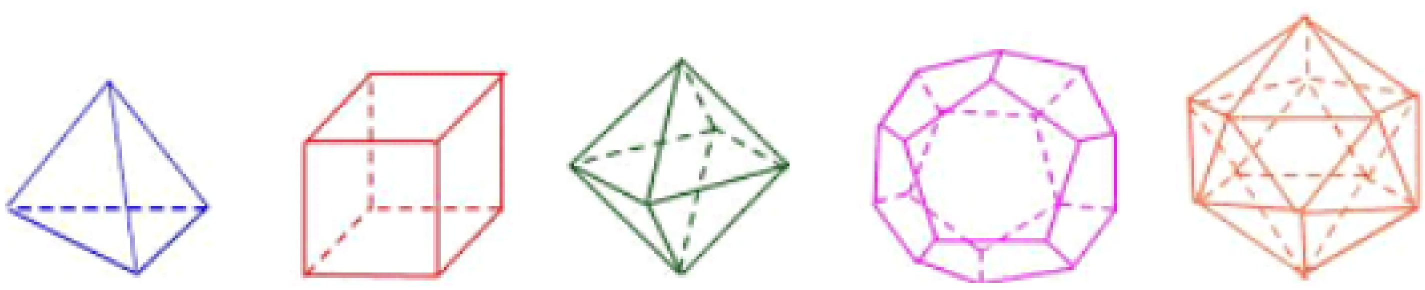
$\{$多面体$\} \supsetneqq \{$简单多面体$\} \supsetneqq \{$凸多面体$\} \supsetneqq \{$正多面体$\}$；

$\{$凸多面体$\} \supsetneqq \{$棱柱$\} \supsetneqq \{$直棱柱$\} \supsetneqq \{$正棱柱$\} \supsetneqq \{$正方体$\}$；

$\{$凸多面体$\} \supsetneqq \{$棱锥$\} \supsetneqq \{$正棱锥$\} \supsetneqq \{$正四面体$\}$.

欧拉公式（**V＋F 一 E＝2**）是简单多面体的重要性质，在运用过程中应重视“各面的边数总和等于各顶点出发的棱数总和、等于多面体棱数的两倍”.“简单多面体各面的内角总和是 $(V-2)\times 360^0$”.

过一个顶点有 n 条棱，每个面是 m 边形的一般方法是什么？



10．球是一种常见的简单几何体．球的位置由球心确定，球的大小仅取决于半径的大小．球包括球面及球面围成的空间区域内的所有的点．球面是到球心的距离等于定长（半径）的点的集合．球的截面是圆面，其中过球心的截面叫做大圆面．球面上两点间的距离，是过这两点的大圆在这两点间的劣弧长，计算球面距离的关键是“根据已知经纬度等条件，先寻求球面上两点间的弦长”，因为此弦长既是球面上两点间的弦长，又是大圆上两点间的弦长．注：“经度是‘小小半径所成角’，纬度是‘大小半径的夹角’”.

球体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，球表面积公式 $S=4\pi R^2$，是两个关于球的几何度量公式. 它们都是球半径及的函数. 解决球的相关问题务必注意球的几何性质（尤其是“球的半径、球心截面距、小圆半径构成直角三角形”；球与多面体相切或相接时，组合体的特殊关联关系）.

十、排列、组合和概率

1. 排列数 A_n^m、组合数 C_n^m 中 $n\ge m, n\ge 1, m\ge 0, n、m\in \mathbf{N}$.

(1) 排列数公式

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}(m\le n)\ ;\ A_n^n=n!=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1.$$

(2) 组合数公式

$$C_n^m=\frac{n\cdot(n-1)\cdots\cdot(n-m+1)}{m\cdot(m-1)\cdots\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{A_n^m}{A_m^m}(m\le n)\ ;\ A_n^m=m!\,C_n^m.$$

(3)组合数性质：

$$C_n^m=C_n^{n-m}(m\le n),\ C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}(m\le n),\ kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1},$$

$$C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\cdots+C_n^r=C_{n+1}^{r+1}.$$

2.解排列组合问题的依据是：分类相加，分步相乘，有序排列，无序组合.

3.解排列组合问题的规律是（优限法和间接法）：相邻问题捆绑法；不邻（相间）问题插空法；多排问题单排法；定位问题优先法；多元问题分类法；有序问题用除法（组合法）；选取问题先选后排法；至多至少问题间接法，特别地还有隔板法（什么时候用？）、字典法、构造法等.

4.(1) 二项式定理：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$，其中各系数就是组合数 C_n^r，它叫做第 r+1 项的二项式系数；展开式共有 n+1 项，其中第 r+l 项 $T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$. 某项“加数 b”的指数≡该项的“项数减去 1 的差”，也可看成组合数的上标.

(2) 二项式展开式中二项式系数（组合数）的性质：对称性、等距性、单调最值性和 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^r+\cdots+C_n^n=2^n$.

（3）应用“赋值法”同样可得相关性质或寻求二项式展开式中“奇次(数)项”“偶次(数)项”的系数和. 如 $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$，奇(偶)次项系数和 $=\frac{1}{2}[f(1)-f(-1)]\ (\frac{1}{2}[f(1)+f(-1)])$.

注意：二项式展开式中区分“二项式系数、项的系数”，寻求其中项的系数的最大值是将相邻两项的系数构建不等式进行.

二项式的应用主要是进行应用其前几项近似计算、整除性计算或证明、应用其首尾几项进行放缩.

5.概率的计算公式：

(1)等可能 事件的概率计算公式： $p(A)=\frac{m}{n}=\frac{card(A)}{card(I)}$；

(2)互斥 事件的概率计算公式： P(A+B)＝P(A)+P(B)；

(3)对立 事件的概率计算公式是： $P(\overline{A})=1-P(A)$；

(4)独立事件同时发生 的概率计算公式是： P(A?B)＝P(A)?P(B)；

(5)独立事件重复试验 的概率计算公式是：

$P_n(k)=C_n^k P^k(1-P)^{n-k}$ (是二项展开式 $[(1-P)+P]^n$ 的第 (k+1) 项).

注意：探求一个事件发生的概率，常应用等价转化思想和分解 (分类或分步)转化思想处理：把所求的事件转化为等可能事件的概率 (常常采用排列组合的知识)；转化为若干个互斥事件中有一个发生的概率； 利用对立事件的概率， 转化为相互独立事件同时发生的概率； 看作某一事件在 n 次实验中恰有 k 次发生的概率， 但要注意公式的使用条件 . 事件互斥是事件独立的必要非充分条件，反之，事件对立是事件互斥的充分非必要条件 .

十一.统 计

1.抽样方法 ：(1)简单随机抽样 (抽签法、随机样数表法)常常用于总体个数较少时，它的主要特征是从总体中逐个抽取 .(2)分层抽样，主要特征分层按比例抽样，主要使用于总体中有明显差异 .共同点：每个个体被抽到的概率都相等（ $\frac{n}{N}$ ）

2.总体分布的估计 就是用总体中样本的频率作为总体的概率 .

3.用样本的算术平均数作为对 总体期望值的估计 ；用样本方差 的大小估计总体数据波动性的好差 (方差大波动差).公式如下：

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)-(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i)^2,S=\sqrt{S^2}\text{(标准方差)}$$

样本数据做如下变换 $x_i'=ax_i+b$，则 $\overline{x'}=a\overline{x}+b$， $(S')^2=a^2S^2$.

总体估计还要掌握： (1)一“表” (频率分布表)一“图” (频率分布直方图).

注意 ：直方图的纵轴 (小矩形的高)一般是频率除以组距的商 (而不是频率)，横轴一般是数据的大小，小矩形的面积表示频率 .

十二.导 数

1.导数的意义 ：曲线在该点处的切线的斜率 (几何意义)、瞬时速度、边际成本 (成本为因变量、产量为自变量的函数的导数). $(x^n)'=nx^{n-1}$， $(C)'=0$ (C 为常数)，$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$， $[Cf(x)]'=Cf'(x)$.

2.多项式函数的 导数与 函数的 单调性 ：

在一个区间上 $f'(x)\geq 0$ (个别点取等号) $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在此区间上为增函数 .

在一个区间上 $f'(x)\leq 0$ (个别点取等号) $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在此区间上为减函数 .

3.导数与极值、导数与最值 ：

(1)函数 $f(x)$ 在 x_0 处有 $f'(x_0)=0$ 且“左正右负” $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处取极大值；

函数 $f(x)$ 在 x_0 处有 $f'(x_0)=0$ 且“左负右正” $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处取极小值 .

注意：①在 x_0 处有 $f'(x_0)=0$ 是函数 $f(x)$ 在 x_0 处取极值的必要非充分条件 .

②求函数极值的方法 ：先找定义域，再求导，找出定义域的分界点，列表求出极值 . 特别是给出函数极大 (小)值的条件，一定要既考虑 $f'(x_0)=0$，又要考虑验“左正右负”（“左负右正”)的转化，否则条件没有用完，这一点一定要切记 .

③单调性与最值（极值）的研究要注意列表！

(2)函数 $f(x)$ 在一闭区间上的最大值是此函数在此区间上的极大值与其端点值中的“最大值”；

函数 $f(x)$ 在一闭区间上的最小值是此函数在此区间上的极小值与其端点值中的“最小值”；

注意：利用导数求最值的步骤 ：先找定义域 再求出导数为 0 及导数不存在的的点，然后比较定义域的端点值和导数为 0 的点对应函数值的大小， 其中最大的就是最大值，最小就为最小值 .

4.应用导数求曲线的切线方程 ，要以“切点坐标”为桥梁 ，注意题目中是“处 ”还是“过 ”，对“二次抛物线” 过抛物线上一点的切线 $\Leftrightarrow$ 抛物线上该点 处的切线，但 对“三次曲线”过其上一点的切线包含两条，其中一条是该点处的切线，另一条是与曲线相交于该点 .

5.微积分的创始人是牛顿、莱布尼兹 .

6.注意应用函数的导数，考察函数单调性、最值 (极值)，研究函数的性态，数形结合解决方程不等式等相关问题 .