

理科数学试题

一.选择题:本题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的

1. 设集合 $M = \mathbb{R}, N = \{x \mid |x| < 2\}, P = \{y \mid y = 2^x - 1\}$, 则 $(C \cup M) \cap (C \cup N) = ()$

- (A) $(-1, 2)$ (B) $(-\infty, 2]$ (C) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

2. 设向量 $a = (1, 2), a + b = (0, 3)$, 则向量 $c = (1, 5)$ 用 a, b 表示为 $()$

- (A) $c = a + b$ (B) $c = a + 2b$ (C) $c = 2a + b$ (D) $c = a - b$

3. 已知变量 x, y 之间的一组数据如表: 则 y 与 x 的线性回归直线必过点 $()$

x	0	1	2	3
y	1	3	5	7

- (A) $(\frac{3}{2}, 4)$ (B) $(\frac{3}{2}, 2)$ (C) $(1, 4)$ (D) $(2, 2)$

4. 若命题 $p: \forall x > 3, x^3 - 27 > 0$, 则 $\neg p$ 是 $()$

- (A) $\forall x \leq 3, x^3 - 27 \leq 0$ (B) $\exists x > 3, x^3 - 27 \leq 0$ (C) $\forall x > 3, x^3 - 27 \leq 0$ (D) $\exists x \leq 3, x^3 - 27 \leq 0$

5. 若函数 $f(x) = \sqrt{3}\cos(2x + \alpha) - \sin(2x + \alpha)$ 的图象关于直线 $x = 0$ 对称, 则 $\alpha = ()$

- (A) $\alpha = k\pi - \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ (B) $\alpha = k\pi - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$ (C) $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ (D) $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{6}$

$(k \in \mathbb{Z})$

6. $\{a_n\}$ 是等差数列, 若 $a_1 + a_4 + a_7 = 2\pi$, 则 $\tan(a_3 + a_5) = ()$

- (A) $-\sqrt{3}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\sqrt{3}$

7. 在区间 $(-1, 1)$ 内任取两个实数, 则这两个实数的绝对值之和小于 1 的概率是 $()$

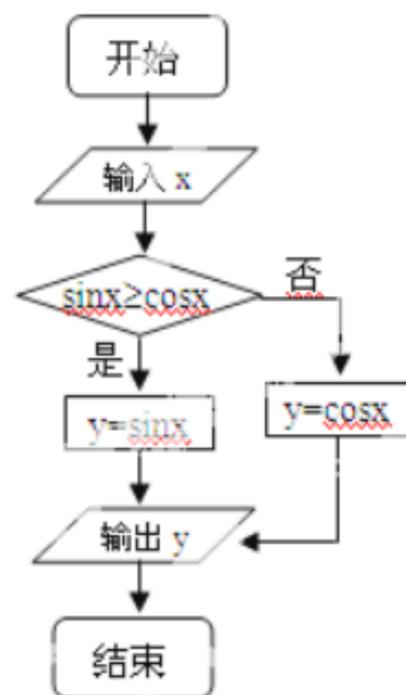
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{6}$

8. 执行如图所示的程序框图, 若输入 $x \in [0, 2\pi]$, 则 y 的取值范围是 $()$

- (A) $[0, 1]$ (B) $[-1, 1]$ (C) $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ (D) $[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

9. 已知 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, 则 $g(x) = f(2-x)$ 的单调增区间是 $()$

- (A) $[-1, 0]$ 及 $[1, +\infty)$ (B) $[-\sqrt{3}, 0]$ 及 $[\sqrt{3}, +\infty)$



(C) $[-1, 1]$ 及 $[0, 1]$ (D) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ 及 $[0, \sqrt{3}]$

10. 已知向量 $a = (x+z, 3)$, $b = (2, y-z)$, 且 $a \perp b$. 若 x, y 满足不等式 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 2 \end{cases}$, 则 z 的取值范围

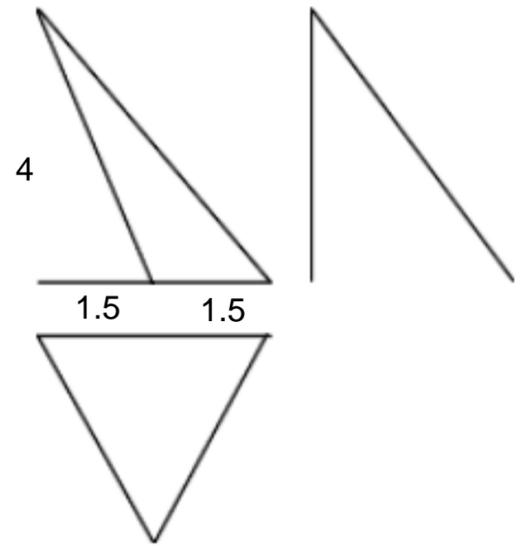
为 ()

(A) $[-6, 4]$ (B) $[-4, 6]$ (C) $[0, 4]$ (D) $[0, 6]$

11. 如图是一个三棱锥的三视图, 其俯视图是正三角形, 主视图与左视图

都是直角三角形. 则这个三棱锥的外接球的表面积是 ()

(A) 19π (B) 28π (C) 67π (D) 76π



12. 设 $f(x) = |x^2 + 2x - 1|$, 若 $a < b < -1$, 且 $f(a) = f(b)$,

则 $(a+1)(b+1)$ 的取值范围是 ()

(A) $(-1, 1)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(0, 2)$ (D) $(1, 2)$

二. 填空题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分

13. 若 $f(x)$ 是 $y = e^x$ 的反函数, 且 $|f(a)| = |f(b)|$, $a \neq b$, 则 $a+b$ 的取值范围是 _____

14. 不等式 $(x-2)\sqrt{x+3} \geq 0$ 的解集是 _____

15. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的单调函数 $f(x)$ 满足对一切 $x > 0$ 总有 $f[f(x) - \log_2 x] = 3$,

则 $g(x) = f(x) + x - 4$ 的零点个数是 _____

16. 双曲线中心在原点, 焦点在 x 轴上, 两条渐近线分别为 l_1, l_2 , 经过右焦点 F

垂直于 l_1 的直线分别交 l_1, l_2 于 A, B 两点, 已知 $|OA|, |AB|, |OB|$ 成等差数列, 则 $e =$ _____

三. 解答题: 本大题共 6 小题; 共 70 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

一个正四面体木块的四个面上分别写有数字 1, 2, 3, 4, 将三个这样的四面体木块抛于桌面上, 记与桌面贴合的一面上的数字分别为 x, y, z .

(1) 求 $x+y+z=6$ 的概率;

(2) 求 xyz 能被 3 整除的概率.

18. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=2\cos^2 \omega x+\sin(2 \omega x-\frac{\pi}{6})$ ($\omega>0$).

(1) 若实数 $x_0, x_0+\frac{\pi}{2}$ 是函数 $y=f(x)-1$ 的两个相邻零点, 求 ω 的值;

(2) $\triangle ABC$ 中, 若 $f(\frac{A}{4})=2$, $\angle B>\angle C, BC=\sqrt{21}, S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}, O$ 为 $\triangle ABC$ 的外心, 求 $\angle AOB$ 的值. (利用已经求出的 ω 的值,)

19. (本题满分 12 分)

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n , 且 $2a_n-S_n=1$.

证明 $\{a_n\}$ 是等比数列并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

记 $b_n=2^{n+1}a_n, c_n=\log_2 b_1+\log_2 b_2+\dots+\log_2 b_n, T_n=\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\dots+\frac{1}{c_n}$,

求使 $k\frac{n2^n}{n+1}\geq(2n-9)T_n$ 恒成立的实数 k 的取值范围.

20. (本题满分 12 分)

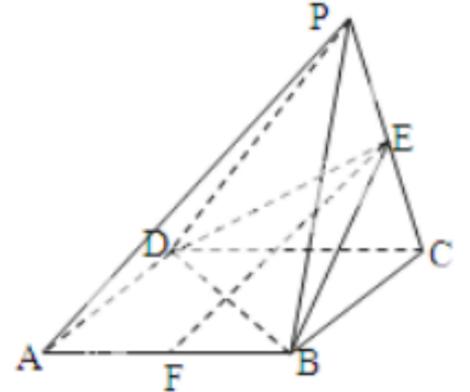
如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PB=PC=AB \perp$ 平面 PDC ,

E 为棱 PC 的中点, F 为 AB 中点.

(1) 求证: $EF \perp$ 平面 PAD ;

(2) 求证: 平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$;

(3) 求二面角 $E-DB-A$ 的大小.



21. (本题满分 12 分)

设椭圆 $E: \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且点 $M(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$ 在椭圆上.

() 求椭圆 E 的方程;

() 直线 l 经过点 $M(-2,0)$ 与椭圆 E 交于 A, B 两点, O 为原点, 试求 $\triangle AOB$ 面积最大值及此时的直线方程.

22. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 是 R 上的奇函数, 且 $f(1)=3, f(2)=12$.

() 求 a, b, c 的值;

() 证明 $f(x)$ 在 R 上是增函数;