开封高中 2015 届高一数学《集合与函数概念》单元测试题

命题人：张信乾　　　　审题人：郭晨亮

一、选择题．（每题 5 分，共 60 分）

1. 设集合 $A=\{x\mid -\frac{1}{2}<x<2\}, B=\{x\mid x^2\le 1\}$，则 $A\cup B=$ （　　）

A. $\{x\mid -1\le x<2\}$　　B. $\{x\mid -\frac{1}{2}<x\le 1\}$

C. $\{x\mid x<2\}$　　D. $\{x\mid 1\le x<2\}$

2. 下列四个函数中，在 $(0,+\infty)$ 上为增函数的是 （　　）

A. $f(x)=3-x$　　B. $f(x)=x^2-3x$　　C. $f(x)=-\frac{1}{x+1}$　　D. $f(x)=-|x|$

3. 下列四组函数，表示同一函数的是 （　　）

A. $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=x$　　B. $f(x)=x$，$g(x)=\frac{x^2}{x}$

C. $f(x)=\sqrt{x^2-4}$，$g(x)=\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}$　　D. $f(x)=|x+1|$，$g(x)=\begin{cases}x+1 & x\ge -1\\ -x-1 & x<-1\end{cases}$

4. 若函数 $y=x^2+(2a-1)x+1$ 在区间 $(-\infty, 2]$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是 （　　）

A. $[-\frac{3}{2}, +\infty)$　　B. $(-\infty, -\frac{3}{2}]$　　C. $[\frac{3}{2}, +\infty)$　　D. $(-\infty, \frac{3}{2}]$

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3 (x>1),\\ -x^2+2x (x\le 1).\end{cases}$ 若 $f(a)=-\frac{5}{4}$，则 a 的值为 （　　）

A. $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{5}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{5}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

6. 若关于 x 的方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负根，则 （　　）

A. $a\le 1$　　B. $0<a<1$　　C. $a<1$　　D. $0<a\le 1$ 或 $a<0$

7. 若偶函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1]$ 上是增函数，则 （　　）

A. $f(-\frac{3}{2})<f(-1)<f(2)$　　B. $f(-1)<f(-\frac{3}{2})<f(2)$

C. $f(2)<f(-1)<f(-\frac{3}{2})$　　D. $f(2)<f(-\frac{3}{2})<f(-1)$

8. $f(x)=x^3+\sqrt[3]{x}+1$，若 $f(a)=2$，则 $f(-a)$ 的值为 （　　）

A. 3　　B. 0　　C. -1　　D. -2

9. 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调增加，则满足 $f(2x-1)<f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的 x 的取值范围是（　）

A. $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$　　B. $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$　　D. $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$

10. 已知函数 $f(x)=\sqrt{-mx^2+6mx+m+8}$ 的定义域为R，则实数m取值范围为（　　）

A. $\{m\mid -1<m\le 0\}$　　B. $\{m\mid -1<m<0\}$　　C. $\{m\mid m\le 0\}$　　D. $\{m\mid m<-1$ 或 $m>0\}$

11. 已知函数 $f(n)=\begin{cases}n-3 (n\ge 10)\\ f[f(n+5)] (n<10)\end{cases}$，其中 $n\in N$，则 $f(8)$ 等于（　）

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 7

12. 对实数 a 和 b，定义运算“⊗”：$a\otimes b=\begin{cases}a, a-b\le 1\\ b, a-b>1\end{cases}$，设函数 $f(x)=(x^2-2)\otimes(x-1), x\in R$. 若函数 $y=f(x)-c$ 的图象与 x 轴恰有两个公共点，则实数 c 的取值范围是（　）

A. $(-1,1]\cup(2,+\infty)$　　B. $(-2,-1]\cup(1,2]$　　C. $(-\infty,-2)\cup(1,2]$　　D. $[-2,-1]$

二、填空题．（每题 5 分，共 20 分）

13. 函数 $f(x)=-2x^2+6x(-2<x\le 2)$ 的值域是 ______ $\left(-20,\frac{9}{2}\right]$

14. 若 $f(x)$ 是一次函数，$f[f(x)]=4x-1$，则 $f(x)=$__________ $-2x+1$ 或 $2x-\frac{1}{3}$

15. 已知实数 $a\ne 0$，函数 $f(x)=\begin{cases}2x+a, x<1\\ -x-2a, x\ge 1\end{cases}$，若 $f(1-a)=f(1+a)$，则 a 的值为________________ $-\frac{3}{4}$

16. 若 $f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$，且在 $(-\infty, 0)$ 内是增函数，又 $f(-2)=0$，则 $xf(x)<0$ 的解集是________ $(-2,0)\cup(0,2)$

三、解答题．

17.（本小题满分 10 分）已知 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=x^2-2x$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 作出函数 $f(x)$ 的图象，并指出其单调区间.

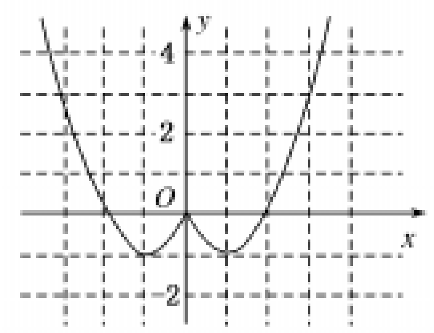
解：(1) 当 $x<0$ 时，$-x>0$，

$\therefore f(-x)=(-x)^2-2(-x)=x^2+2x$，

又 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，

$\therefore f(-x)=f(x)$，

$\therefore$ 当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+2x$.



(2) 由(1) 知，$f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\ge 0,\\ x^2+2x, & x<0.\end{cases}$　　)

作出 $f(x)$ 的图象如图所示：

由图得函数 $f(x)$ 的递减区间是 $(-\infty, -1]$，$[0,1]$.

$f(x)$ 的递增区间是 $[-1,0]$，$[1, +\infty)$.

18. （12分）已知函数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

（1）判断函数在区间 $[1,+\infty)$ 上的单调性，并用定义证明你的结论；

（2）求该函数在区间 $[1,4]$ 上的最大值与最小值。

解：任取 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2x_1+1}{x_1+1}-\frac{2x_2+1}{x_2+1}=\frac{(x_1-x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

∵ $x_1-x_2<0$，$(x_1+1)(x_2+1)>0$，

所以，$f(x_1)-f(x_2)<0$，$f(x_1)<f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数 .

所以函数 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上是增函数 .

最大值为 $f(4)=\dfrac{2\times4+1}{4+1}=\dfrac{9}{5}$，　最小值为 $f(1)=\dfrac{2\times1+1}{1+1}=\dfrac{3}{2}$.

19. (12分) 某民营企业生产 A，B 两种产品，根据市场调查和预测，A 产品的利润与投资成正比，其关系如图 1，B 产品的利润与投资的算术平方根成正比，其关系如图 2（注：利润与投资单位是万元）

（1）分别将 A，B 两种产品的利润表示为投资的函数，并写出它们的函数关系式 .

（2）该企业已筹集到 10 万元资金，并全部投入 A，B 两种产品的生产，问：怎样分配这 10 万元投资，才能是企业获得最大利润，其最大利润约为多少万元（精确到 1 万元） .

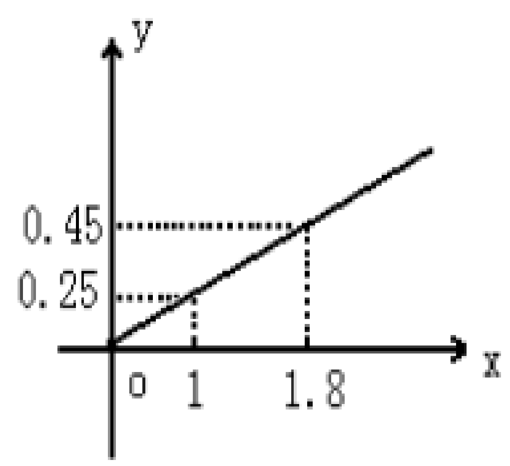


图1

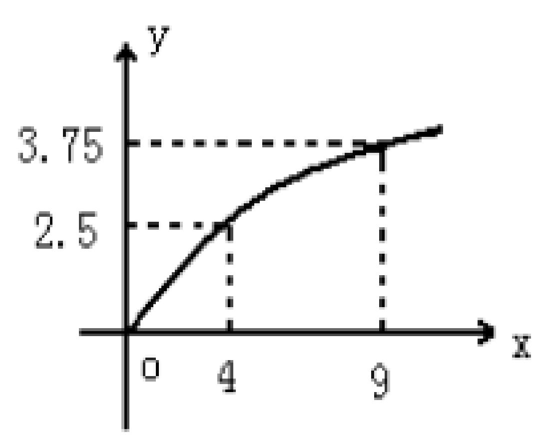


图2

解：（1）投资为 x 万元，A产品的利润为 $f(x)$ 万元，B产品的利润为 $g(x)$ 万元，

由题设 $f(x)=k_1\cdot x$，$g(x)=k_2\cdot\sqrt{x}$，.

由图知 $f(1)=\dfrac14$ ∴ $k_1=\dfrac14$，又 $g(4)=\dfrac52$ ∴ $k_2=\dfrac54$

从而 $f(x)=\dfrac14 x,(x\ge0)$，$g(x)=\dfrac54\sqrt{x}$，$(x\ge0)$

（2）设 A 产品投入 x 万元，则 B 产品投入 $10-x$ 万元，设企业的利润为 y 万元

$Y=f(x)+g(10-x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac54\sqrt{10-x}$，$(0\le x\le10)$，

令 $\sqrt{10-x}=t$，则 $y=\dfrac{10-t^2}{4}+\dfrac54 t=-\dfrac14\left(t-\dfrac52\right)^2+\dfrac{65}{16}$，$(0\le t\le\sqrt{10})$，

当 $t=\dfrac52$，$y_{max}\approx4$，此时 $x=10-\dfrac{25}{4}$=3.75

∴ 当 A 产品投入 3.75 万元，B 产品投入 6.25 万元时，企业获得最大利润约为 4 万元。

20. (12分) 已知 $f(x)$ 的定义域为 $(0，+\infty)$，且满足 $f(2)=1$，$f(xy)=f(x)+f(y)$，又当 $x_2>x_1>0$ 时，$f(x_2)>f(x_1)$.

(1) 求 $f(1)$、$f(4)$、$f(8)$ 的值；

(2) 若有 $f(x)+f(x-2)\le3$ 成立，求 x 的取值范围.

解：(1) $f(1)=f(1)+f(1)$，∴ $f(1)=0$，$f(4)=f(2)+f(2)=1+1=2$，$f(8)=f(2)+f(4)=2+1=3$.

(2) ∵ $f(x)+f(x-2)\le3$，∴ $f[x(x-2)]\le f(8)$，又∵对于函数 $f(x)$ 有 $x_2>x_1>0$ 时 $f(x_2)>f(x_1)$，∴ $f(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上为增函数.

$$\therefore\begin{cases}x>0\\x-2>0\\x(x-2)\le8\end{cases}\quad ?\ 2<x\le4.$$

∴ x 的取值范围为 $(2,4]$.

21. （12分） 已知函数 $f(x)=x^2+bx+c(b\ge0,c\in R)$，若 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,0]$ 时，值域也是 $[-1,0]$。符合上述条件的函数 $f(x)$ 是否存在？若存在，求出 $f(x)$ 的表达式；若不存在，请说明理由。

解：设符合条件的 $f(x)$ 是存在。

∵ 函数图象的对称轴是 : $x=-\dfrac{b}{2}$，

又 $b\ge0$，∴ $-\dfrac{b}{2}\le0$

(1) 当 $-\frac{1}{2}<-\frac{b}{2}\le 0$ 时,则 $0\le b<1$ 时，函数在 $x=-\frac{b}{2}$ 时有最小值 ,则

$\begin{cases} f(-\frac{b}{2})=-1 \\ f(-1)=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{2}+c=-1 \\ 1-b+c=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=0 \\ c=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=4 \\ c=3 \end{cases}$ (舍去)

(2) 当 $-1<-\frac{b}{2}\le -\frac{1}{2}$ 时,则 $1\le b<2$ 时,则

$\begin{cases} f(-\frac{b}{2})=-1 \\ f(0)=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} b=2 \\ c=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=-2 \\ c=0 \end{cases}$ (均舍去)

(3) 当 $-\frac{b}{2}\le -1$ 时,则 $b\ge 2$ 时，函数在 $[-1,0]$ 上单调递增 ,则

$\begin{cases} f(-1)=-1 \\ f(0)=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=2 \\ c=0 \end{cases}$

综上所述，设符合条件的函数有两个，$f(x)=x^2-1$ 或 $f(x)=x^2+2x$.

22. 已知函数 $f(x)$ 对任意实数 x 均有 $f(x)=kf(x+2)$，其中常数 k 为负数，且 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上有表达式 $f(x)=x(x-2)$.

⑴求 $f(-1)$， $f(2.5)$ 的值 .

⑵写出 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的表达式，并讨论函数 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的单调性（无需证明）；

⑶求出 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的最大值与最小值，并求出相应的自变量的值 .