试卷类型：A

广东省广州市 2010 届高三第一次模拟考试

数 学（理科）

2010．3

本试卷共 4 页，21 小题，满分 150 分．考试用时 120 分钟．

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用 2B 铅笔在“考生号”处填涂考生号，用黑色字迹钢笔或签字笔将自己所在的市、县/区、学校，以及自己的姓名和考生号、试室号、座位号填写在答题卡上．用 2B 铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上．
2. 选择题（www.scxkg.com 四川新课改）每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上．
3. 非选择题（www.scxkg.com 四川新课改）必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液．不按以上要求作答的答案无效．
4. 作答选做题时，请先用 2B 铅笔填涂选做题的题（或题组号）对应的信息点，再作答．漏涂、错涂、多涂的，答案无效．
5. 考生必须保持答题卡的整洁．考试结束后，将试卷和答题卡一并交回．

参考公式：球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，其中 R 是球的半径．

一、选择题（**www.scxkg.com** 四川新课改）：本大题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，满分 **40** 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 复数 $(3i-1)i$ 的共轭复数是

A．$-3+i$　　B．$-3-i$　　C．$3+i$　　D．$3-i$

2. 设一地球仪的球心为空间直角坐标系的原点 O，球面上有两个点 A，B 的坐标分别为 $A(1,2,2)$，$B(2,-2,1)$，则 $|AB|=$

A．18　　B．12　　C．$3\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{3}$

3. 已知集合 $A=\{-1,1\}$，$B=\{x|ax+1=0\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 a 的所有可能取值的集合为

A．$\{-1\}$　　B．$\{1\}$　　C．$\{-1,1\}$

D．$\{-1,0,1\}$

4. 若关于 x 的不等式 $|x-a|<1$ 的解集为 $(1,3)$，则实数 a 的值为

A．2　　　　B．1　　　　C．-1　　　　D．-2

5. 已知 p：直线 a 与平面 α 内无数条直线垂直，q：直线 a 与平面 α 垂直．则 p 是 q 的

A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

6. 根据《中华人民共和国道路交通安全法》规定：车辆驾驶员血液酒精浓度在 20—80 mg/100ml（不含 80）之间，属于酒后驾车，处暂扣一个月以上三个月以下驾驶证，并处 200 元以上 500 元以下罚款；血液酒精浓度在 80mg/100ml（含 80）以上时，属醉酒驾车，处十五日以下拘留和暂扣三个月以上六个月以下驾驶证，并处 500 元以上 2000 元以下罚款．

据《法制晚报》报道，2009 年 8 月 15 日至 8 月 28 日，全国查处酒后驾车和醉酒驾车共 28800 人，如图 1 是对这 28800 人酒后驾车血液中酒精含量进行检测所得结果的频率分布直方图，则属于醉酒驾车的人数约为

A．2160　　　　B．2880

C．4320　　　　D．8640

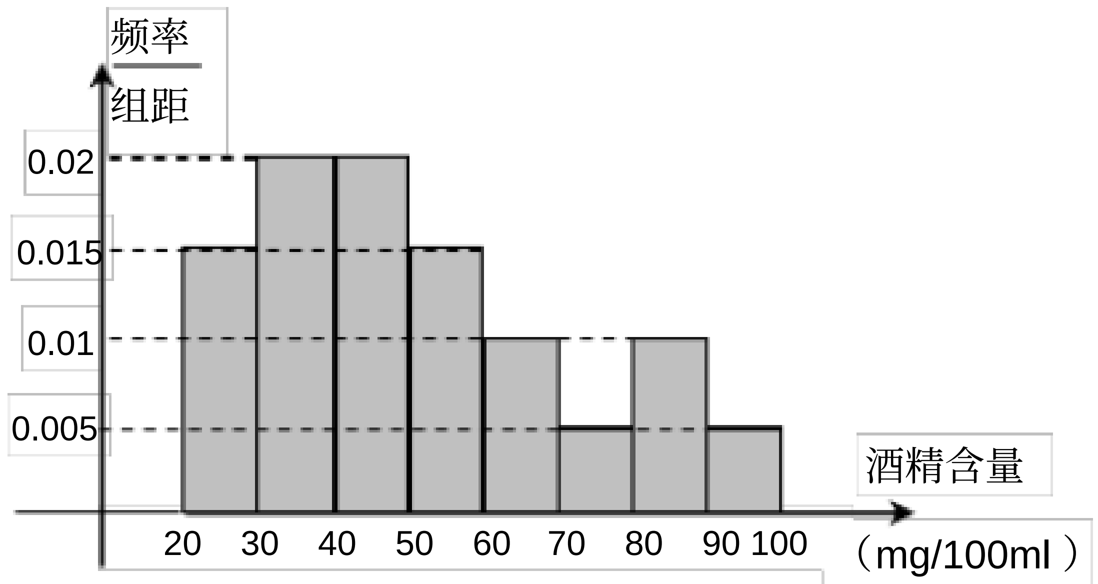


图 1

7. 在 $\triangle ABC$ 中，点 P 在 BC 上，且 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PC}$，点 Q 是 AC 的中点，若 $\overrightarrow{PA}=(4,3)$，$\overrightarrow{PQ}=(1,5)$，则 $\overrightarrow{BC}=$

A．$(-2,7)$　　　　B．$(-6,21)$　　　　C．$(2,-7)$　　　　D．$(6,-21)$

8. 如图 2所示的三角形数阵叫“莱布尼兹调和三角形”，它们是由整数的倒数组成的，第 n 行有 n 个数且两端的数均为 $\frac{1}{n}$ $(n\geq 2)$，每个数是它下一行左右相邻两数的和，如 $\frac{1}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$，…，则第 10行第 4个数（从左往右数）为

A．$\frac{1}{1260}$　　　　B．$\frac{1}{840}$

C．$\frac{1}{504}$　　　　D．$\frac{1}{360}$

$\frac{1}{1}$

$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$　$\frac{1}{6}$　$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4}$　$\frac{1}{12}$　$\frac{1}{12}$　$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{5}$　$\frac{1}{20}$　$\frac{1}{30}$　$\frac{1}{20}$　$\frac{1}{5}$

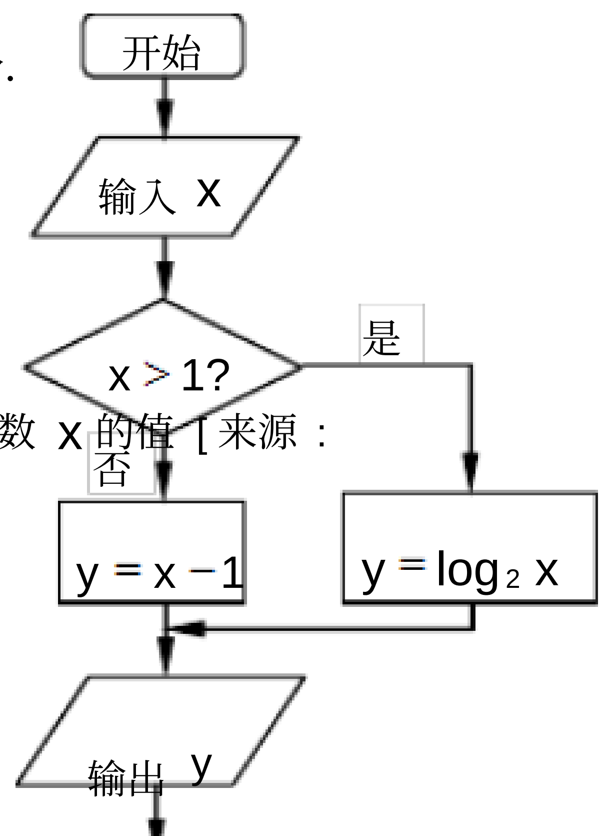
图 2

二、填空题：本大题共 **7** 小题，考生作答 **6** 小题，每小题 **5** 分，满分 **30** 分．

（一）必做题（ **9～13** 题）

9. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，公比 $q=2$，若 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n=127$，则 n 的值为 ________．

10．某算法的程序框如图 3 所示，若输出结果为 $\frac{1}{2}$，则输入的实数 x 的值 [来源：



http://wx.jtyjy.com/.Com]

是________.

（注：框图中的赋值符号“ $=$ ”也可以写成 “ $\leftarrow$ ”或“ $:=$ ”）

11. 有一个底面半径为 1、高为 2 的圆柱，点 O 为这个圆柱底面圆的圆心，在这个圆柱内随机取一点 P，

则点 P 到点 O 的距离大于 1 的概率为 _________.

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(a-2)x-1, & x\le 1,\\ \log_a x, & x>1.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围为 ___.

13. 如图 4，点 O 为正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的中心，点 E 为面 $B'BCC'$ 的中心，点 F 为 $B'C'$ 的中点，则空间四边形 $D'OEF$ 在该正方体的面上的正投影可能是 _________（填出所有可能的序号）.

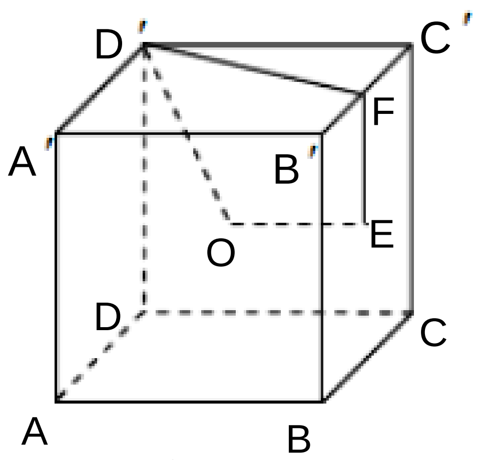
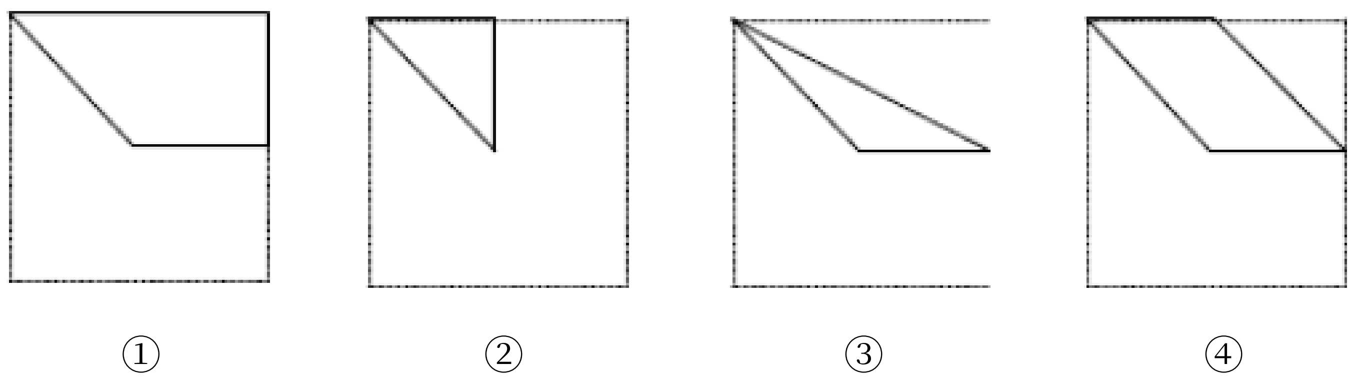


图 4



（二）选做题（ **14～15** 题，考生只能从中选做一题）

14.（几何证明选讲选做题）如图 5，AB 是半圆 O 的直径，点 C 在半圆上，$CD\perp AB$，垂足为 D，且 $AD=5DB$，设 $\angle COD=\theta$，

则 $\tan\theta$ 的值为 ____.

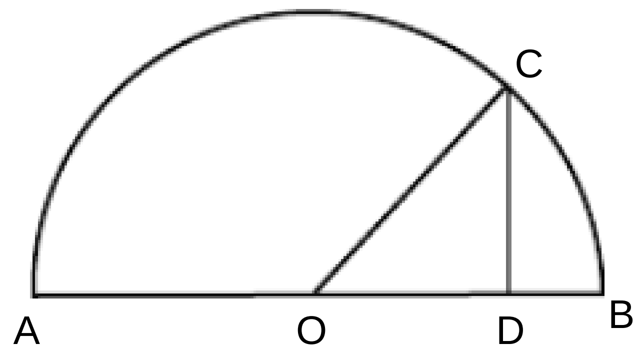


图 5

15.（坐标系与参数方程选做题） 在极坐标系中，已知两点 A、B 的极坐标分别为 $\left(3,\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\left(4,\dfrac{\pi}{6}\right)$，则△ AOB（其中 O 为极点）的面积为_______.

三、 解答题：本大题共 **6**小题，满分 **80**分．解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤.

16.（本小题满分 **12**分）[来源：HTTP://WX.JTYJY .COM/]

已知函数 $f(x)=\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi$（其中 $x\in\mathbf{R}$，$0<\varphi<\pi$）.

（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（2）若函数 $y=f\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$对称，求 φ 的值 .

17. （本小题满分 **12**分）

某公司为庆祝元旦举办了一个抽奖活动，现场准备的抽奖箱里放置了分别标有数字 1000、800、600、0 的四个球（球的大小相同）．参与者随机从抽奖箱里摸取一球（取后即放回），公司即赠送与此球上所标数字等额的奖金（元），并规定摸到标有数字 0 的球时可以再摸一次，但是所得奖金减半（若再摸到标有数字 0 的球就没有第三次摸球机会），求一个参与抽奖活动的人可得奖金的期望值是多少元.

18. （本小题满分 **14**分）

如图 6，正方形 $ABCD$ 所在平面与圆 O 所在平面相交于 CD，线段 CD 为圆 O 的弦，AE 垂直于圆 O 所在平面，垂足 E 是圆 O 上异于 C、D 的点，$AE=3$，圆 O 的直径为 9.

（1）求证：平面 $ABCD\perp$平面 ADE；

（2）求二面角 $D-BC-E$ 的平面角的正切值.

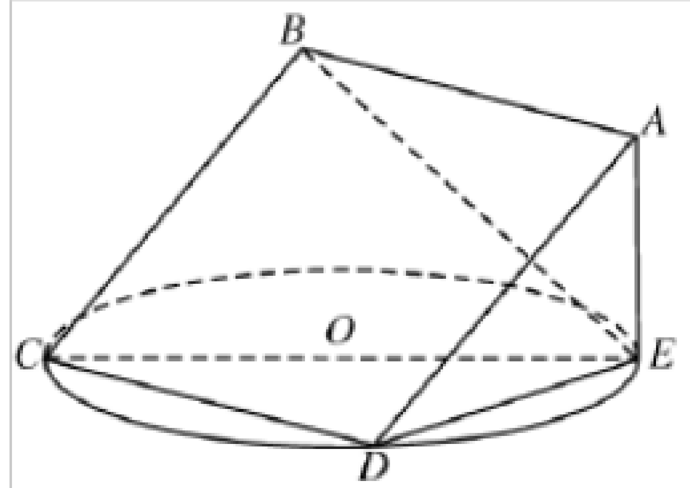


图6

19. （本小题满分 **14**分）

已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\frac{a}{x}+\ln x-1$，$g(x)=(\ln x-1)e^x+x$（其中 e 为自然对数的底数）.

（1）求函数 $f(x)$ 在区间 $(0,e]$上的最小值；

（2）是否存在实数 $x_0\in(0,e]$，使曲线 $y=g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的切线与 y 轴垂直？若存在，求出 x_0 的值；若不存在，请说明理由.

20. （本小题满分 **14**分）

已知点 $F(0,1)$，直线 l：$y=-1$，P 为平面上的动点，过点 P 作直线 l 的垂线，垂足为 Q，且 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$.

（1）求动点 P 的轨迹 C 的方程；

（2）已知圆 M 过定点 $D(0,2)$，圆心 M 在轨迹 C 上运动，且圆 M 与 x 轴交于 A、B

两点，设 $|DA| = l_1$，$|DB| = l_2$，求 $\frac{l_1}{l_2} + \frac{l_2}{l_1}$ 的最大值.

21.（本小题满分 **14** 分）

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$，都有 $a_n > 0$，$S_n = \sqrt{a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3}$.

（1）求 a_1，a_2 的值；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n；

（3）证明：$a_{2n+1}^n \geq a_{2n}^n + a_{2n-1}^n$.

2010 年广州市普通高中毕业班综合测试（一）

数学（理科）试题参考答案及评分标准

说明：1. 参考答案与评分标准指出了每道题要考查的主要知识和能力，并给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与参考答案不同，可根据试题主要考查的知识点和能力比照评分标准给以相应的分数.

2. 对解答题中的计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的得分，但所给分数不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

4. 只给整数分数，选择题（ www.scxkg.com 四川新课改）和填空题不给中间分.

一、选择题（ **www.scxkg.com** 四川新课改）：本大题考查基本知识和基本运算．共 **8** 小题，每小题 **5** 分，满分 **40** 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	A	B	C	B	B

二、填空题：本大题查基本知识和基本运算，体现选择性．共 **7** 小题，每小题 **5** 分，满分 **30** 分．其中 **14~15** 题是选做题，考生只能选做一题.

9. 7　　10. $\sqrt{2}$　　11. $\frac{2}{3}$　　12. $(2,3]$　　13. ①②③

14. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　15. 3

三、 解答题：本大题共 6小题，满分 80分．解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤.

16. （本小题满分 12分）

（本小题主要考查三角函数性质和三角函数的基本关系等知识，考查化归与转化的数学思想方法，以及运算求解能力 ）

（1）解：∵ $f(x)=\sin(x+\varphi)$,

∴函数 $f(x)$的最小正周期为 2π .

（2）解：∵函数 $y=f\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$,

又 $y=\sin x$ 的图像的对称轴为 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ （$k\in\mathbf{Z}$ ），

令 $2x+\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$,

将 $x=\frac{\pi}{6}$代入，得 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{12}$ （$k\in\mathbf{Z}$ ）.

∵ $0<\varphi<\pi$ ， ∴ $\varphi=\frac{11\pi}{12}$.

17. （本小题满分 12分）

（本小题主要考查随机变量的分布列、数学期望等知识，考查或然与必然的数学思想方法，以及数据处理能力、运算求解能力和应用意识 ）

解：设 ξ表示摸球后所得的奖金数，由于参与者摸取的球上标有数字 1000，800，600，0，

当摸到球上标有数字 0 时，可以再摸一次，但奖金数减半，即分别为 500，400，300，0.

则 ξ的所有可能取值为 1000，800，600，500，400，300，0.

依题意得

$P(\xi=1000)=P(\xi=800)=P(\xi=600)=\frac{1}{4}$,

$P(\xi=500)=P(\xi=400)=P(\xi=300)=P(\xi=0)=\frac{1}{16}$,

则 ξ的分布列为

奖	1000	800	600	500	400	300	0

金 ξ							
概率 P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

所以所求期望值为

$$E\xi=\frac{1}{4}(1000+800+600)+\frac{1}{16}(500+400+300+0)$$

$=675$ 元.

答：一个参与抽奖活动的人可得奖金的期望值是 675 元.

18.（本小题满分 **14**分）

（本小题主要考查空间线面关系、空间向量及坐标运算等知识，考查数形结合、化归与转化的数学思想方法，以及空间想象能力、推理论证能力和运算求解能力）

（1）证明：$\because$ AE 垂直于圆 O 所在平面，CD 在圆 O 所在平面上，

$\therefore AE\perp CD$.

在正方形 ABCD 中，$CD\perp AD$，

$\because AD\cap AE=A$，$\therefore CD\perp$ 平面 ADE .

$\because CD\subset$ 平面 ABCD，

$\therefore$ 平面 ABCD $\perp$ 平面 ADE .

（2）解法 **1**：$\because CD\perp$ 平面 ADE，$DE\subset$ 平面 ADE，

$\therefore CD\perp DE$.

$\therefore$ CE 为圆 O 的直径，即 $CE=9$.

设正方形 ABCD 的边长为 a，

在 Rt△CDE 中，$DE^2=CE^2-CD^2=81-a^2$，

在 Rt△ADE 中，$DE^2=AD^2-AE^2=a^2-9$，

由 $81-a^2=a^2-9$，解得，$a=3\sqrt{5}$.

$\therefore DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=6$.

过点 E 作 $EF\perp AD$ 于点 F，作 $FG\parallel AB$ 交 BC 于点 G，连结 GE，

由于 $AB\perp$ 平面 ADE，$EF\subset$ 平面 ADE，

$\therefore EF\perp AB$.

$\because AD\cap AB=A$，

$\therefore EF\perp$ 平面 ABCD .

$\because BC\subset$ 平面 ABCD，

$\therefore BC\perp EF$.

$\because BC\perp FG$，$EF\cap FG=F$，

$\therefore BC\perp$ 平面 EFG .

$\because EG\subset$ 平面 EFG，

$\therefore BC\perp EG$.

$\therefore\angle FGE$ 是二面角 $D-BC-E$ 的平面角.

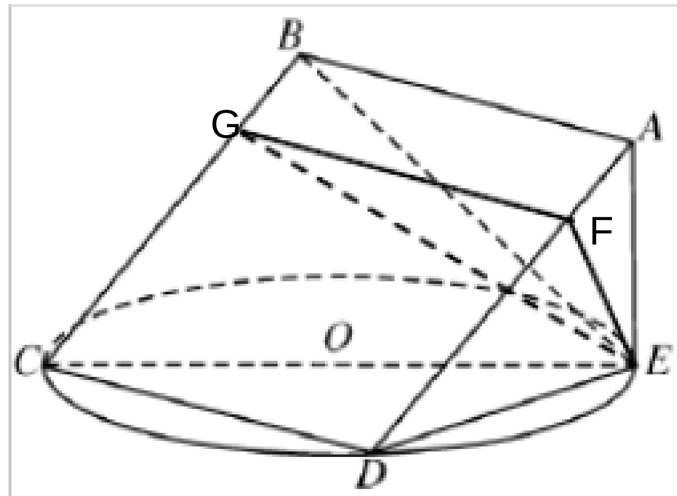


图6

在 Rt△ADE 中，$AD=3\sqrt{5}$，$AE=3$，$DE=6$，

$\because AD\cdot EF=AE\cdot DE$，

$\therefore EF=\dfrac{AE\cdot DE}{AD}=\dfrac{3\times 6}{3\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

在 Rt△EFG 中，$FG=AB=3\sqrt{5}$，

$\therefore \tan\angle EGF=\dfrac{EF}{FG}=\dfrac{2}{5}$.

故二面角 $D-BC-E$ 的平面角的正切值为 $\dfrac{2}{5}$.

解法 **2**：$\because CD\perp$ 平面 ADE，$DE\subset$ 平面 ADE，

$\therefore CD\perp DE$.

$\therefore CE$ 为圆 O 的直径，即 $CE=9$.

设正方形 $ABCD$ 的边长为 a，

在 Rt△CDE 中，$DE^2=CE^2-CD^2=81-a^2$，

在 Rt△ADE 中，$DE^2=AD^2-AE^2=a^2-9$，

由 $81-a^2=a^2-9$，解得，$a=3\sqrt{5}$.

$\therefore DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=6$.

以 D 为坐标原点，分别以 ED、CD 所在的直线为 x 轴、y 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$，$E(-6,0,0)$，$C(0,-3\sqrt{5},0)$，$A(-6,0,3)$，[来源:] $B(-6,-3\sqrt{5},3)$.

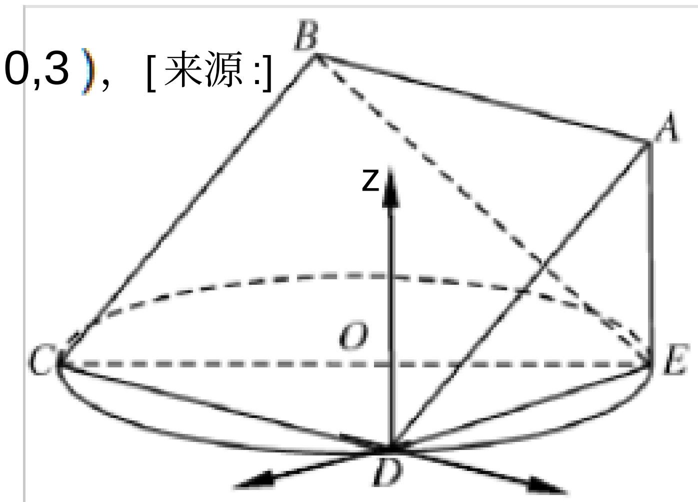


图6

设平面 $ABCD$ 的法向量为 $\mathbf{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\mathbf{n}_1\cdot\overrightarrow{DA}=0,\\ \mathbf{n}_1\cdot\overrightarrow{DC}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-6x_1+3z_1=0,\\ -3\sqrt{5}y_1=0.\end{cases}$

取 $x_1=1$，则 $\mathbf{n}_1=(1,0,2)$是平面 $ABCD$ 的一个法向量.

设平面 BCE 的法向量为 $\mathbf{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\mathbf{n}_2\cdot\overrightarrow{EB}=0,\\ \mathbf{n}_2\cdot\overrightarrow{EC}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-3\sqrt{5}y_2+3z_2=0,\\ 6x_2-3\sqrt{5}y_2=0.\end{cases}$

取 $y_2=2$，则 $\mathbf{n}_2=(\sqrt{5},2,2\sqrt{5})$是平面 $ABCD$ 的一个法向量.

$\because \cos\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\rangle = \dfrac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \dfrac{(1,0,2)\cdot(\sqrt{5},2,2\sqrt{5})}{\sqrt{1+0+4}\cdot\sqrt{5+4+20}} = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$，

$\therefore \sin\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\rangle = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$．

$\therefore \tan\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\rangle = \dfrac{2}{5}$．

故二面角 $D-BC-E$ 的平面角的正切值为 $\dfrac{2}{5}$．

19.（本小题满分 **14**分）

（本小题主要考查函数与导数等知识，考查分类讨论，化归与转化的数学思想方法，以及推理论证能力和运算求解能力）

（1）解：$\because f(x)=\dfrac{a}{x}+\ln x-1$，$\therefore f'(x)=-\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-a}{x^2}$．

令 $f'(x)=0$，得 $x=a$．

①若 $a\le 0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$在区间 $(0,e]$上单调递增，此时函数 $f(x)$ 无最小值.

②若 $0<a<e$，当 $x\in(0,a)$时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$在区间 $(0,a)$上单调递减，

当 $x\in(a,e]$时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$在区间 $(a,e]$上单调递增，

所以当 $x=a$时，函数 $f(x)$ 取得最小值 $\ln a$．

③若 $a\ge e$，则 $f'(x)\le 0$，函数 $f(x)$在区间 $(0,e]$上单调递减，

所以当 $x=e$时，函数 $f(x)$ 取得最小值 $\dfrac{a}{e}$．

综上可知，当 $a\le 0$时，函数 $f(x)$在区间 $(0,e]$上无最小值；

当 $0<a<e$时，函数 $f(x)$在区间 $(0,e]$上的最小值为 $\ln a$；

当 $a\ge e$时，函数 $f(x)$在区间 $(0,e]$上的最小值为 $\dfrac{a}{e}$．

（2）解：$\because g(x)=(\ln x-1)e^x+x$，$x\in(0,e]$，

$\therefore g'(x)=(\ln x-1)'e^x+(\ln x-1)(e^x)'+1$

$$=\frac{e^x}{x}+(\ln x-1)e^x+1=\left(\frac{1}{x}+\ln x-1\right)e^x+1.$$

由（1）可知，当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}+\ln x-1$.

此时 $f(x)$ 在区间 $(0,e]$ 上的最小值为 $\ln 1=0$，即 $\frac{1}{x}+\ln x-1\geq 0$.

当 $x_0\in(0,e]$，$e^{x_0}>0$，$\frac{1}{x_0}+\ln x_0-1\geq 0$，

$\therefore g'(x_0)=\left(\frac{1}{x_0}+\ln x_0-1\right)e^{x_0}+1\geq 1>0$.

曲线 $y=g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的切线与 y 轴垂直等价于方程 $g'(x_0)=0$ 有实数解.

而 $g'(x_0)>0$，即方程 $g'(x_0)=0$ 无实数解.　[来源 :]

故不存在 $x_0\in(0,e]$，使曲线 $y=g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的切线与 y 轴垂直.

20.（本小题满分 **14** 分）

（本小题主要考查圆、抛物线、基本不等式等知识，考查数形结合、化归与转化、函数与方程的数学思想方法，以及推理论证能力和运算求解能力　　）

（1）解：设 $P(x,y)$，则 $Q(x,-1)$，

$\because \overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$，

$\therefore (0,y+1)\cdot(-x,2)=(x,y-1)\cdot(x,-2)$.

即 $2(y+1)=x^2-2(y-1)$，即 $x^2=4y$，

所以动点 P 的轨迹 C 的方程 $x^2=4y$.

（2）解：设圆 M 的圆心坐标为 $M(a,b)$，则 $a^2=4b$.　　①

圆 M 的半径为 $|MD|=\sqrt{a^2+(b-2)^2}$.

圆 M 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+(b-2)^2$.

令 $y=0$，则 $(x-a)^2+b^2=a^2+(b-2)^2$，

整理得，$x^2-2ax+4b-4=0$.　　②

由①、②解得，$x=a\pm 2$.

不妨设 $A(a-2,0)$，$B(a+2,0)$，

$\therefore l_1=\sqrt{(a-2)^2+4}$，$l_2=\sqrt{(a+2)^2+4}$.

$\therefore \frac{l_1}{l_2}+\frac{l_2}{l_1}=\frac{l_1^2+l_2^2}{l_1 l_2}=\frac{2a^2+16}{\sqrt{a^4+64}}$

$$=2\sqrt{\frac{(a^2+8)^2}{a^4+64}}=2\sqrt{1+\frac{16a^2}{a^4+64}},\qquad ③$$

当 $a\neq 0$ 时，由③得，$\frac{l_1}{l_2}+\frac{l_2}{l_1}=2\sqrt{1+\frac{16}{a^2+\frac{64}{a^2}}}\leq 2\sqrt{1+\frac{16}{2\times 8}}=2\sqrt{2}$.

当且仅当 $a=\pm 2\sqrt{2}$ 时，等号成立.

当 $a=0$ 时，由③得，$\frac{l_1}{l_2}+\frac{l_2}{l_1}=2$.

故当 $a=\pm 2\sqrt{2}$ 时，$\frac{l_1}{l_2}+\frac{l_2}{l_1}$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$.

21.（本小题满分 **14** 分）

（本小题主要考查数列、不等式、二项式定理等知识，考查化归与转化的数学思想方法，以及抽象概括能力、运算求解能力和创新意识）

（1）解：当 $n=1$ 时，有 $a_1=S_1=\sqrt{a_1^3}$，

由于 $a_n>0$，所以 $a_1=1$.

当 $n=2$ 时，有 $S_2=\sqrt{a_1^3+a_2^3}$，即 $a_1+a_2=\sqrt{a_1^3+a_2^3}$，

将 $a_1=1$ 代入上式，由于 $a_n>0$，所以 $a_2=2$. http://wx.jtyjy.com/

（2）解：由 $S_n=\sqrt{a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3}$，

得 $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$， ①

则有 $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3+a_{n+1}^3=(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})^2$. ②

②−①，得 $a_{n+1}^3=(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})^2-(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$，

由于 $a_n>0$，所以 $a_{n+1}^2=2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+a_{n+1}$. ③

同样有 $a_n^2=2(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})+a_n\ (n\geq 2)$， ④

③−④，得 $a_{n+1}^2-a_n^2=a_{n+1}+a_n$.

所以 $a_{n+1}-a_n=1$.

由于 $a_2-a_1=1$，即当 $n\geq 1$时都有 $a_{n+1}-a_n=1$，所以数列 $\{a_n\}$是首项为 1，公差为 1 的等差数列.

故 $a_n=n$.

（3）证明 **1**：由于 $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\cdots$，

$$(1-x)^n=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-C_n^3x^3+\cdots,$$

所以 $(1+x)^n-(1-x)^n=2C_n^1x+2C_n^3x^3+2C_n^5x^5+\cdots$.

即 $(1+x)^n-(1-x)^n-2nx=2C_n^3x^3+2C_n^5x^5+\cdots$.

令 $x=\frac{1}{2n}$，则有 $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n-\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n-1\geq 0$.

即 $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\geq 1+\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n$，

即 $(2n+1)^n\geq(2n)^n+(2n-1)^n$

故 $a_{2n+1}^n\geq a_{2n}^n+a_{2n-1}^n$.

证明 **2**：要证 $a_{2n+1}^n\geq a_{2n}^n+a_{2n-1}^n$， http://wx.jtyjy.com/

只需证 $(2n+1)^n\geq(2n)^n+(2n-1)^n$，

只需证 $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\geq 1+\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n$，

只需证 $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n-\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n\geq 1$.

由于 $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n-\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n$

$$=\left[C_n^0+C_n^1\left(\frac{1}{2n}\right)+C_n^2\left(\frac{1}{2n}\right)^2+C_n^3\left(\frac{1}{2n}\right)^3+\cdots\right]-\left[C_n^0-C_n^1\left(\frac{1}{2n}\right)+C_n^2\left(\frac{1}{2n}\right)^2-C_n^3\left(\frac{1}{2n}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=2\left[C_n^1\left(\frac{1}{2n}\right)+C_n^3\left(\frac{1}{2n}\right)^3+C_n^5\left(\frac{1}{2n}\right)^5+\cdots\right]$$

$$=1+2\left[C_n^3\left(\frac{1}{2n}\right)^3+C_n^5\left(\frac{1}{2n}\right)^5+\cdots\right]\geq 1.$$

因此原不等式成立.