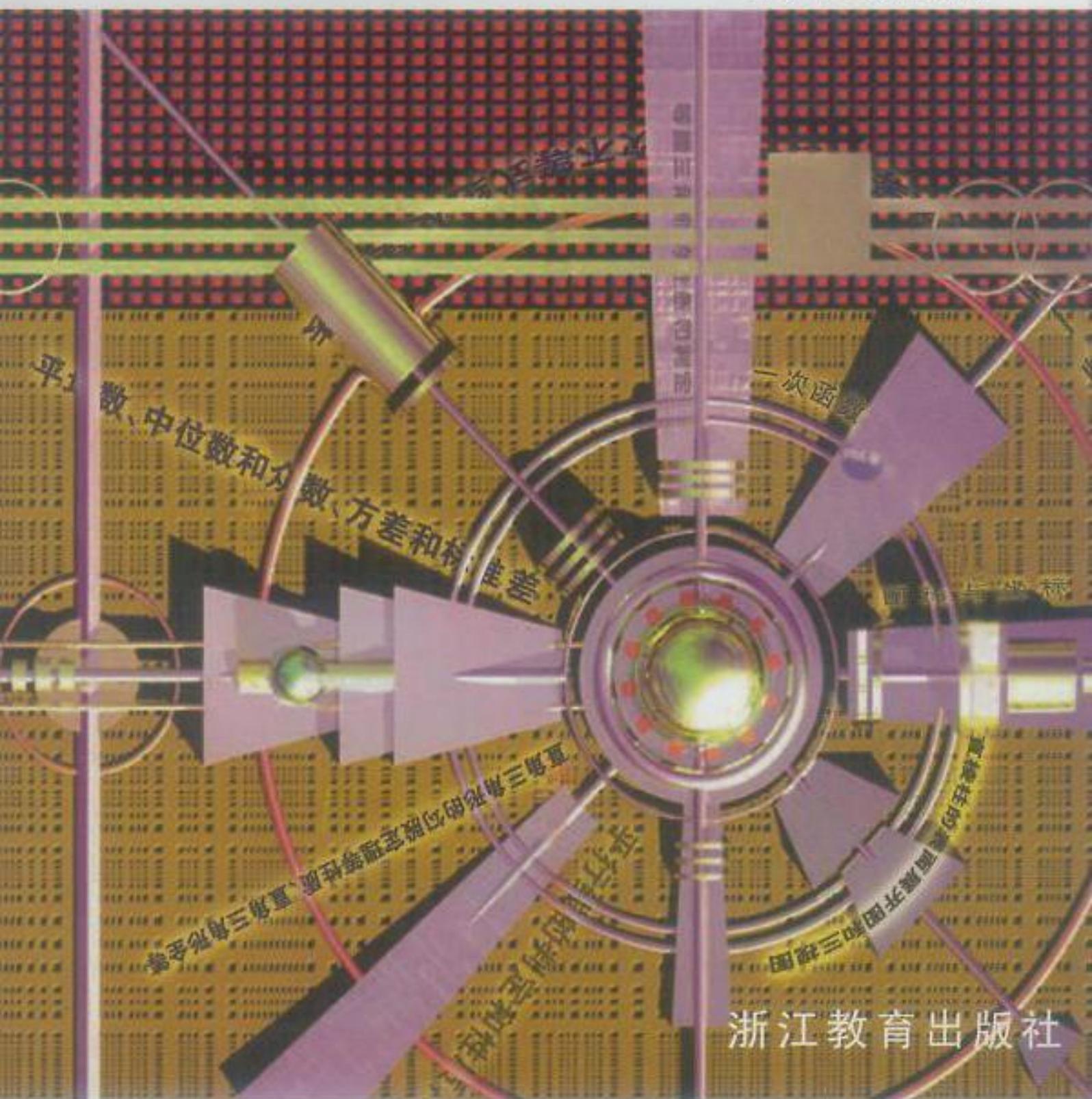


经全国中小学教材审定委员会 2004 年初审通过
义务教育课程标准实验教科书

数学

SHUXUE

八年级上册



义务教育课程标准实验教科书

数学

八年级上册
SHUXUE

本册教材编写人员

主 编 范良火

副主编 岑 申 张宝珍

编写人员 范良火 金克勤 金才华

徐鸿斌 王亚权 岑 申

许芬英 王利明 郑 璋

郑 洁 张幼云

浙江教育出版社



前言

亲爱的同学：

当装帧精美、内容丰富、有趣实用的数学教科书放在你面前时，我们衷心地欢迎你进入一个新的数学世界。

这册新的数学教科书，保持了前两册的体例、结构和理念。“合作学习”希望你与同伴们携手探索新的数学知识，领悟新的数学方法；“探究活动”引导你亲身经历知识的发生过程，体验“发现”的快乐；“阅读材料”帮助你接触许多有趣的数学史实，开阔你的数学视野；而“设计题”和“课题学习”为你充分显示和发展聪明才智，并在数学中进行探索、实践和创新提供了机会。

数学并不神秘，每个人都可以学好数学。学好数学重要的是要有充分的信心、足够的毅力和良好的方法。我们殷切地希望你认真地阅读课文，思考其中的问题；认真地听老师分析，与同伴交流和讨论。有困难时多动脑、多动手、多想办法、多读、多做，弄懂每一个概念、定理和方法。数学一定会成为你的好朋友。

按照教育部制订的全日制义务教育《数学课程标准（实验稿）》编写的这套教科书共六册，供七~九年级学生使用。八年级上册首先介绍平行线和两类特殊而重要的三角形——等腰三角形、直角三角形。通过这两章的学习，不仅能使我们了解这些图形的判定、性质及在现实世界中的应用，同时也能培养我们思考问题的严密性、逻辑性。直棱柱是新增的内容，以它为载体使我们建立起平面图形和立体图形的联系，如三视图、展开图等。在样本与数据分析这一章中，我们将进一步学习数据处理的思想和方法，并用来解决一些简单的实际问题。现实世界中不等关系远比相等关系多且复杂，学习不等关系也就拉近了与实际生活的距离。图形与坐标告诉我们如何确定物体在平面上的位置，给我们一种崭新的数形结合的数学方法，为用图象研究函数的性质奠定基础。函数是探索具体问题中的数量关系和变化规律的极为重要的数学工具。用一次函数刻画实际问题有着非常广泛的应用。

愿我们的教科书帮你增长知识，提高才干，使你能从教科书中欣赏数学的魅力和作用，并享受学习数学的乐趣。

编者

2005年5月

目录



第一章 平行线

2



第二章 特殊三角形

22



第三章 直棱柱

54



第四章 样本与数据分析初步

74



第五章 一元一次不等式

100



第六章 图形与坐标

124



第七章 一次函数

150





斜拉桥的各条拉杆彼此平行，你有什么方法来检验它们是平行的？

台球运动中，当母球 P 击中桌边点 A ，经桌边反弹后击中相邻的另一条桌边，再次反弹，那么母球 P 经过的路线 BC 与 PA 平行吗？你能说明理由吗？

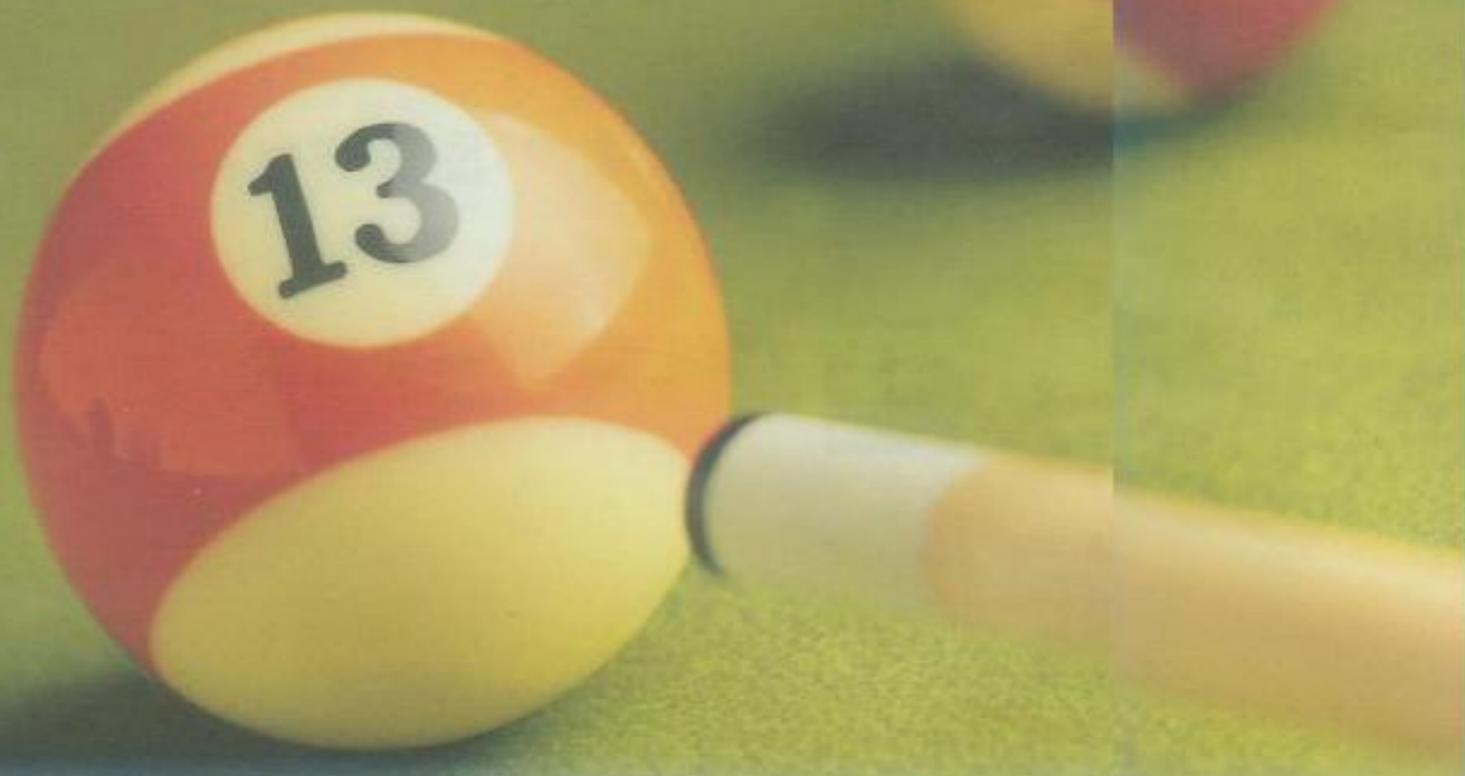
本章将学习平行线的判定和性质，通过本章的学习，我们将找到解决上述问题的方法。



CONTENTS

目录

| | |
|------------------|----|
| 1.1 同位角、内错角、同旁内角 | 2 |
| 1.2 平行线的判定 | 5 |
| 1.3 平行线的性质 | 10 |
| 1.4 平行线之间的距离 | 16 |
| ● 小结 | 19 |
| ● 目标与评定 | 20 |





同位角、内错角、同旁内角

TONGWEIJIAO NEICUOJIAO TONGPANGNEIJIAO

中国最早的风筝据说是由古代哲学家墨翟制作的. 风筝的骨架构成了多种关系的角.



我们已经知道平面上两条直线有相交和平行两种位置关系. 本节我们要讨论两条直线和第三条直线相交的关系.

如图1-1, 两条直线 l_1, l_2 被第三条直线 l_3 所截, 构成了8个角. 这8个角有多种关系, 如 $\angle 1$ 与 $\angle 3, \angle 2$ 与 $\angle 4, \angle 5$ 与 $\angle 7, \angle 6$ 与 $\angle 8$ 分别是对顶角. 下面介绍几种新的关系:

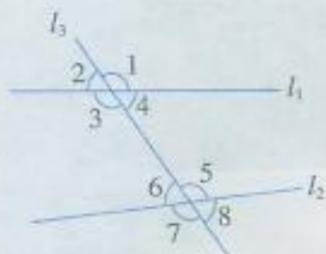


图1-1

1. 观察 $\angle 1$ 与 $\angle 5$ 的位置, 它们都在第三条直线 l_3 的同旁, 并且分别位于直线 l_1, l_2 的同一侧, 这样的一对角叫做**同位角** (corresponding angles).

2. $\angle 3$ 与 $\angle 5$ 分别位于第三条直线 l_3 的异侧, 并且都在两条直线 l_1 与 l_2 之间, 这样的一对角叫做**内错角** (alternate interior angles).

3. $\angle 3$ 与 $\angle 6$ 都在第三条直线 l_3 的同旁, 并且在 l_1 与 l_2 之间, 这样的一对角叫做**同旁内角** (same-side interior angles).



想一想

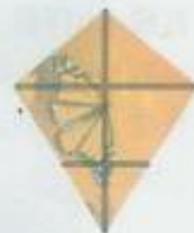
图1-1中,

- (1) $\angle 3$ 与 $\angle 7$ 是同位角吗? 还有哪几对角是同位角?
- (2) $\angle 4$ 与 $\angle 6$ 是内错角吗?
- (3) 还有其他同旁内角吗?



做一做

ZUOYIZUO



请用三根竹条或小木棍制作一个如图的风筝骨架. 把它画成几何图形, 并用适当的方法表示图中的角, 然后分别指出其中所有的对顶角、同位角、内错角和同旁内角.

例1 如图1-2, 直线 DE 截 AB, AC , 构成8个角. 指出所有的同位角、内错角和同旁内角.

解 同位角是 $\angle 2$ 和 $\angle 5, \angle 1$ 和 $\angle 8, \angle 3$ 和 $\angle 6, \angle 4$ 和 $\angle 7$; 内错角是 $\angle 1$ 和 $\angle 6, \angle 4$ 和 $\angle 5$; 同旁内角是 $\angle 1$ 和 $\angle 5, \angle 4$ 和 $\angle 6$.

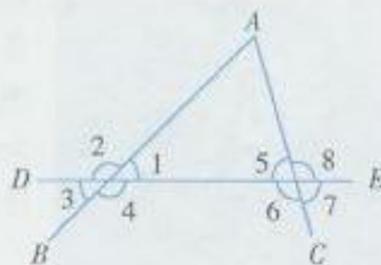


图1-2



合作学习

HEZUOXUEXI

如图1-3, 两只手的食指和拇指在同一平面内, 它们构成的一对角可以看成是什么角? 类似地, 你还能用两只手的手指构成同位角和同旁内角吗?



图1-3

例2 如图1-4, 直线 DE 交 $\angle ABC$ 的边 BA 于点 F . 如果内错角 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 相等, 那么同位角 $\angle 1$ 与 $\angle 4$ 相等, 同旁内角 $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 互补. 请说明理由.

解 $\because \angle 1 = \angle 2$ (已知),
 $\angle 2 = \angle 4$ (对顶角相等),
 $\therefore \angle 1 = \angle 4.$
 $\because \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (为什么?),
 $\therefore \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ.$

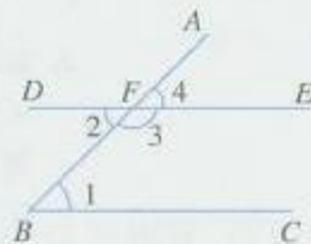
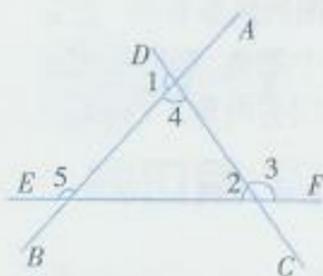


图1-4



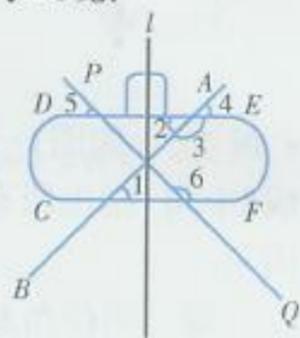


(第1题)

1. (1) 如果把图看成是直线 AB, EF 被直线 CD 所截, 那么 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是一对什么角? $\angle 3$ 与 $\angle 4$ 呢? $\angle 2$ 与 $\angle 4$ 呢?
 (2) 如果把图看成是直线 CD, EF 被直线 AB 所截, 那么 $\angle 1$ 与 $\angle 5$ 是一对什么角? $\angle 4$ 与 $\angle 5$ 呢?

(3) 哪两条直线被哪一条直线所截, $\angle 2$ 与 $\angle 5$ 是同位角?

2. 燕子风筝的骨架如图所示, 它是以直线 l 为对称轴的轴对称图形. 已知 $\angle 1 = \angle 4 = 45^\circ$, 问 $\angle 2$ 为多少度? 根据什么? $\angle 5$ 呢? 你还能说出哪些角的度数?

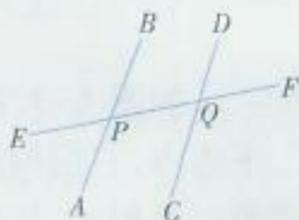


(第2题)



作业题
ZUOYETI

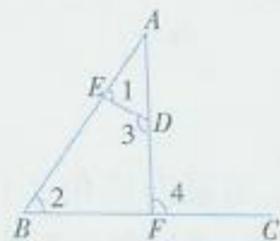
- A 组 1. 如图, 直线 AB, CD 被直线 EF 所截. 请找出一对同位角, 一对内错角和一对同旁内角.



(第1题)

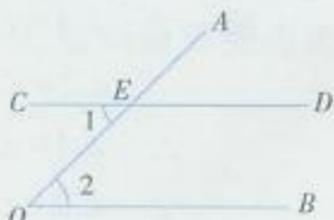
2. 看图填空:

- (1) 若 ED, BF 被 AB 所截, 则 $\angle 1$ 与 _____ 是同位角;
 (2) 若 ED, BC 被 AF 所截, 则 $\angle 3$ 与 _____ 是内错角;
 (3) $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 是 AB 和 AF 被 _____ 所截构成的 _____ 角;
 (4) $\angle 2$ 与 $\angle 4$ 是 _____ 和 _____ 被 BC 所截构成的 _____ 角.



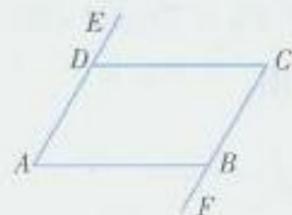
(第2题)

- B 组 3. 如图, CD 交 AO 于点 E . 若 $\angle 1 = \angle 2$, 找出图中和 $\angle 2$ 相等的角, 以及和 $\angle 2$ 互补的角, 并说明理由.



(第3题)

4. 找出图中所有的同位角、内错角和同旁内角.



(第4题)



(第5题)

5. 图中有几对同位角、内错角、同旁内角?



1.2

平行线的判定

PHOXHEXIANDEPAINDING

当骑车路线偏离原定的方向时, 该如何调整? 这和平行线有什么关系?

合作学习
HEZUOXUEXI

我们已经学习过用三角尺和直尺画平行线的方法, 请按图1-5所示方法画两条平行线, 然后讨论下面的问题:

(1) 上面的画法可以看做是怎样的图形变换?

(2) 把图中的直线 l_1, l_2 看成被尺边 AB 所截, 那么在画图过程中, 什么角始终保持相等? 由此你能发现判定两直线平行的方法吗?

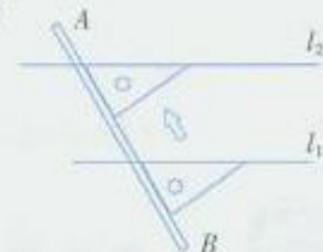


图1-5

一般地, 判定两直线平行有下面的方法:

两条直线被第三条直线所截, 如果同位角相等, 那么这两条直线平行. 简单地说, 同位角相等, 两直线平行.

例 1 已知直线 l_1, l_2 被 l_3 所截 (如图 1-6), $\angle 1=45^\circ, \angle 2=135^\circ$. 判断 l_1 与 l_2 是否平行, 并说明理由.

解 $l_1 \parallel l_2$. 理由如下:

由已知, 得 $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$,

$\therefore \angle 3 = 180^\circ - \angle 2 = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

又 $\because \angle 1 = 45^\circ$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$,

$\therefore l_1 \parallel l_2$ (同位角相等, 两直线平行).

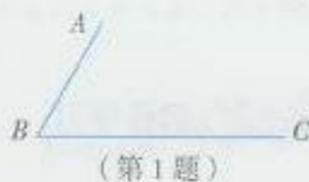


图 1-6

想一想
“在同一平面内, 垂直于同一条直线的两条直线互相平行”是否可以看作平行线判定方法的特殊情形?

课内练习
KENEILIANXI

1. 已知平行四边形的一组邻边如图所示. 利用平移直线的方法, 把它补成一个平行四边形.



(第 1 题)

2. 街道两侧路灯的柱子是否互相平行? 为什么?

3. 某人骑自行车从 A 地出发, 沿正东方向前进至 B 处后, 右转 15° , 沿直线向前行驶到 C 处 (如图). 这时他想仍按正东方向行驶, 那么他应怎样调整行驶方向? 请画出他应继续行驶的路线, 并说明理由.



(第 3 题)

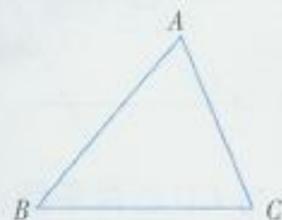


作业题
ZUOYETI

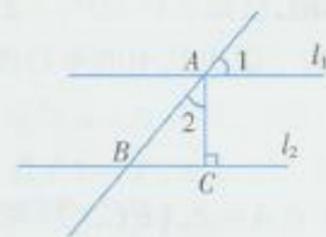
- A 组**
- 已知 $\triangle ABC$ (如图), 分别过各顶点作对边的平行线.
 - 如图, 已知直线 l_1, l_2 被直线 AB 所截, $AC \perp l_2$ 于点 C . 若 $\angle 1 = 50^\circ, \angle 2 = 40^\circ$, 则 l_1 与 l_2 平行吗? 请说明理由.

带有 标志的题, 在本书后“作业题附图”中印有该题的复本, 可剪下来贴在作业本上, 下同.

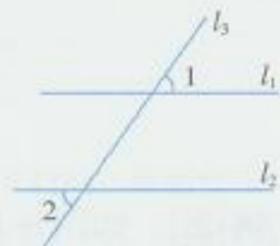
3. 如图, 已知直线 l_1, l_2 被 l_3 所截, $\angle 1 = \angle 2$. 判断 l_1 与 l_2 是否平行, 并说明理由.



(第 1 题)



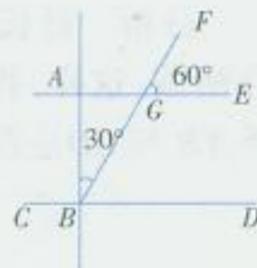
(第 2 题)



(第 3 题)

B 组

4. 如图, $AB \perp CD$ 于点 B , AE 与 BF 相交于点 G , 且 $\angle FGE = 60^\circ, \angle ABG = 30^\circ$. 请判断 AE 与 CD 是否平行, 并说明理由.



(第 4 题)

合作学习
HEZUOXUEXI

如图 1-7, 直线 AB, CD 被直线 EF 所截. 若 $\angle 2 = \angle 3$, 则 AB 与 CD 平行吗? 你可以从以下几个方面考虑:

- 我们已经有的判定两直线平行的方法?
- 由“ $\angle 2 = \angle 3$ ”, 能得出有一对同位角相等吗? 由此你又获得怎样的判定平行线的方法?

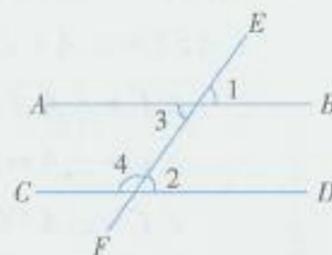


图 1-7

一般地, 判定两直线平行还有下面的方法:

两条直线被第三条直线所截, 如果内错角相等, 那么这两条直线平行. 简单地说, 内错角相等, 两直线平行.

如图,已知 $\angle 1=121^\circ$, $\angle 2=120^\circ$, $\angle 3=120^\circ$. 说出其中的平行线,并说明理由.



例 2 如图1-8, $\angle C+\angle A=\angle AEC$. 判断 AB 与 CD 是否平行,并说明理由.

分析 延长 CE ,交 AB 于点 F (如图1-9),则直线 CD,AB 被直线 CF 所截. 这样,我们可以通过判断内错角 $\angle C$ 和 $\angle AFC$ 是否相等,来判断 AB 与 CD 是否平行.

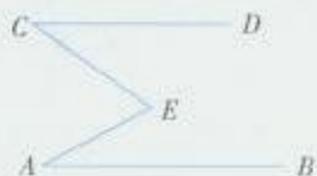


图1-8

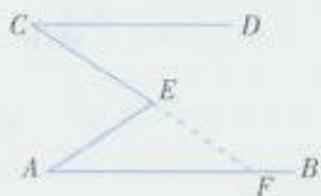


图1-9

解 $AB \parallel CD$. 理由如下:

如图1-9,延长 CE ,交 AB 于点 F ,则

$\angle AEC = \angle A + \angle AFC$ (三角形外角的性质),

$\because \angle C + \angle A = \angle AEC$ (已知),

$\therefore \angle C + \angle A = \angle A + \angle AFC$,

$\therefore \angle C = \angle AFC$,

$\therefore AB \parallel CD$ (内错角相等,两直线平行).

图1-7中,若 $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$,则 AB 与 CD 平行吗?

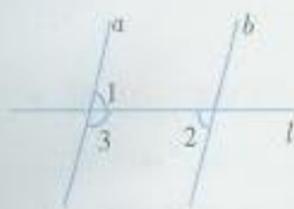
类似地,你还能找到怎样的平行线的判定方法?

一般地,判定两直线平行还有下面的方法:

两条直线被第三条直线所截,如果同旁内角互补,那么这两条直线平行. 简单地说,同旁内角互补,两直线平行.

想一想,上面例2能用“同旁内角互补,两直线平行”的方法来判

定 $AB \parallel CD$ 吗? 请试一试.



(第1题)

1. 如图,直线 a, b 被直线 l 所截.

(1) 若 $\angle 1=75^\circ$, $\angle 2=75^\circ$,则 a 与 b 平行吗? 根据什么?

(2) 若 $\angle 2=75^\circ$, $\angle 3=105^\circ$,则 a 与 b 平行吗? 根据什么?

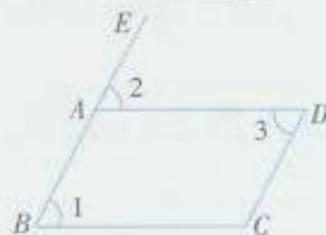
2. 如图, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. 填空:

(1) $\because \angle 1 = \angle 2$ (),

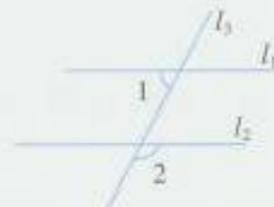
\therefore _____ \parallel _____ ();

(2) $\because \angle 2 = \angle 3$ (),

\therefore _____ \parallel _____ ().



(第2题)



(第3题)

3. 如图,已知直线 l_1, l_2 被直线 l_3 所截, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. 请说明 l_1 与 l_2 平行的理由.



有一条纸带如图1-10所示. 如果工具只有圆规,怎样检验纸带的两条边沿是否平行? 如果没有工具呢? 请说出你的方法和依据.

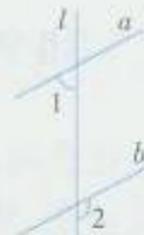
图1-10

(可尝试用折叠的方法,与你的同伴交流)

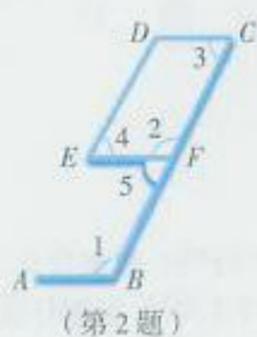


作业题
ZUOYETI

A组 1. 如图,直线 a, b 被直线 l 所截. 若 $\angle 1=62^\circ$, $\angle 2=118^\circ$,则 a 与 b 平行吗? 请说明理由.



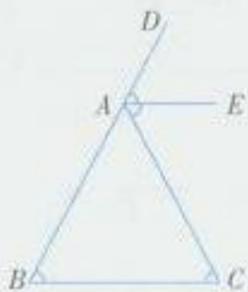
(第1题)



2. 电子屏幕上显示的数字“9”的形状如图,根据图形填空:

- (1) $\because \angle 1 = \angle 2$ (已知),
 \therefore _____ // _____ (_____);
- (2) $\because \angle 4 = \angle 5$ (已知),
 \therefore _____ // _____ (_____);
- (3) $\because \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ (已知),
 \therefore _____ // _____ (_____).

B组 3. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \angle C$, AE 平分 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle CAD$. 判断 AE 与 BC 是否平行,并说明理由.



(第3题)

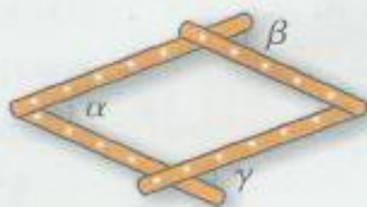


(第4题)

4. 如图,已知 $\angle BAC$ 与 $\angle C$ 互余, $DA \perp BA$ 于点 A . 判断 AD 与 BC 是否平行,并说明理由.



1.3 平行线的性质



PREXIGIAEXEZH

如图放缩尺中, $\angle \alpha$, $\angle \beta$, $\angle \gamma$ 相等吗?



合作学习
HEZUOXUEXI

任意画两条互相平行的直线,再任意画一条直线与这两条平行线相交,测量同位角的度数,你发现了什么?与其他同学的发现相同吗?

一般地,平行线有下面的性质:

两条平行线被第三条直线所截,同位角相等.

简单地说,两直线平行,同位角相等.

例1 如图1-11,梯子的各条横档互相平行, $\angle 1 = 100^\circ$,求 $\angle 2$ 的度数.

解 $\because AB \parallel CD$ (已知),
 $\therefore \angle 3 = \angle 1 = 100^\circ$ (两直线平行,同位角相等).
 $\because \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (平角的意义),
 $\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle 3 = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.



图1-11

例2 如图1-12,已知 $\angle 1 = \angle 2$. 若直线 $b \perp m$,则直线 $a \perp m$. 请说明理由.

解 $\because \angle 1 = \angle 2$ (已知),
 $\therefore a \parallel b$ (同位角相等,两直线平行),
 $\therefore \angle 3 = \angle 4$ (两直线平行,同位角相等).
 $\because b \perp m$ (已知),
 $\therefore \angle 4 = 90^\circ$ (垂直的意义),
 $\therefore \angle 3 = 90^\circ$,
 $\therefore a \perp m$.

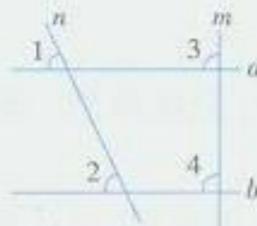


图1-12

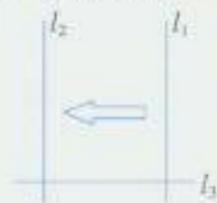


课内练习
KENELIANDI

1. 如图,已知直线 $l_1 \parallel l_2$, $\angle 1 = 40^\circ$,求 $\angle 2$ 的度数.



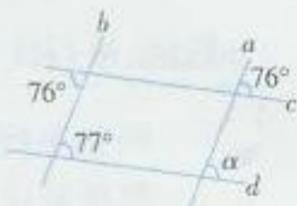
(第1题)



(第2题)

2. 如图, $l_1 \perp l_3$. 把直线 l_1 沿直线 l_3 的任一方向平移,得直线 l_2 ,则 $l_2 \perp l_3$. 请说明理由.

3. 已知 a, b, c, d 四条直线如图.
 (1) 图中哪些直线互相平行? 哪些直线相交?
 (2) 说出 $\angle \alpha$ 的度数.



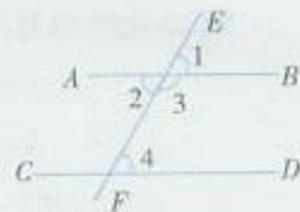
(第3题)



作业题
ZUOYETI

A组

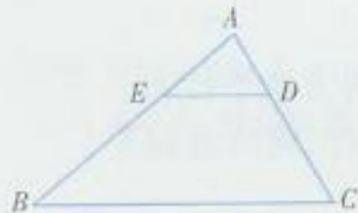
1. 如图, $AB \parallel CD$, $\angle 1 = 60^\circ$, 则 $\angle 2 =$ _____, $\angle 3 =$ _____, $\angle 4 =$ _____.



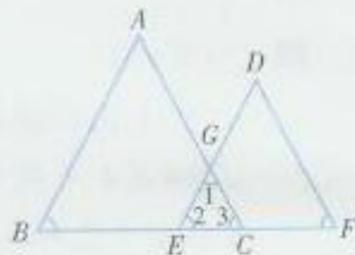
(第1题)

2. 如图, D, E 分别是 AC, AB 上的点. 已知 $\angle ADE = 60^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $\angle AED = 40^\circ$.

- (1) DE 与 BC 平行吗? 请说明理由;
 (2) 求 $\angle B$ 的度数.



(第2题)

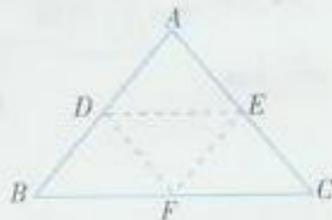


(第3题)

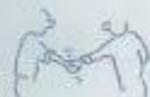
3. 如图, $\angle B = \angle 2$, $\angle F = \angle 3$, 点 B, E, C, F 在同一条直线上. 请找出图中的平行线, 并说明 $\angle A = \angle 1 = \angle D$ 的理由.

B组

4. 折叠三角形纸片 ABC , 使点 A 落在 BC 边上的点 F , 且折痕 $DE \parallel BC$. 若 $\angle B = 50^\circ$, 求 $\angle BDF$ 的度数, 并说明理由.



(第4题)



合作学习
HEZUOXUEXI

如图 1-13, 直线 $AB \parallel CD$, 并被直线 EF 所截. $\angle 2$ 与 $\angle 3$ 相等吗? $\angle 3$ 与 $\angle 4$ 的和是多少度?

建议从以下几方面思考:

(1) 回顾我们已知道的平行线的性质, 由此能得出图 1-13 中哪一对角相等?

(2) $\angle 3$ 与 $\angle 1$ 有什么关系? $\angle 4$ 与 $\angle 2$ 呢?

你发现平行线还有哪些性质?

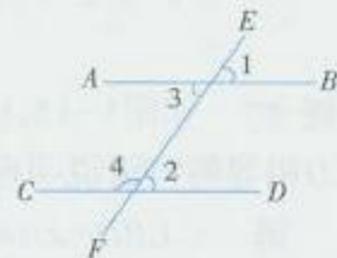


图 1-13

一般地, 平行线还有下面的性质:

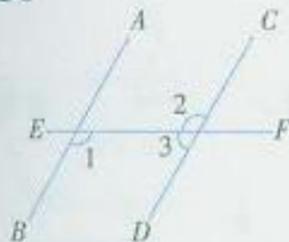
两条平行线被第三条直线所截, 内错角相等. 简单地说, 两直线平行, 内错角相等.

两条平行线被第三条直线所截, 同旁内角互补. 简单地说, 两直线平行, 同旁内角互补.



做一做

ZUOYIZUO



如图, AB, CD 被 EF 所截, $AB \parallel CD$ (填空).

若 $\angle 1 = 120^\circ$, 则 $\angle 2 =$ _____ ();
 $\angle 3 =$ _____ $-\angle 1 =$ _____ ().

例 3 如图 1-14, 已知 $AB \parallel CD, AD \parallel BC$. 判断 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是否相等, 并说明理由.

解 $\angle 1 = \angle 2$. 理由如下:

$\because AB \parallel CD$ (已知),

$\therefore \angle 1 + \angle BAD = 180^\circ$ (两直线平行, 同旁内角互补),

$\because AD \parallel BC$ (已知),

$\therefore \angle 2 + \angle BAD = 180^\circ$ (同理),

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ (同角的补角相等).

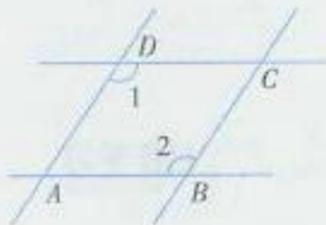


图 1-14

例 4 如图 1-15, 已知 $\angle ABC + \angle C = 180^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$. $\angle CBD$ 与 $\angle D$ 相等吗? 请说明理由.

解 $\angle CBD = \angle D$. 理由如下:

$\because \angle ABC + \angle C = 180^\circ$ (已知),

$\therefore AB \parallel CD$ (同旁内角互补, 两直线平行),

$\therefore \angle D = \angle ABD$ (两直线平行, 内错角相等),

又 $\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle CBD = \angle ABD = \angle D$.

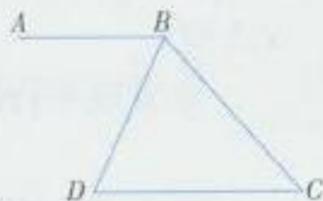
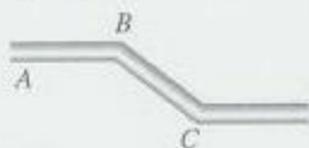
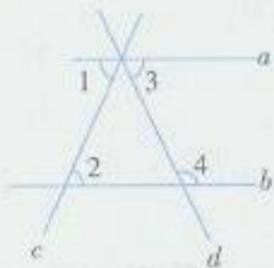


图 1-15

课内练习
KENEILIANXI



(第 1 题)



(第 3 题)

1. 如图, 在墙面上安装某一管道需经两次拐弯, 拐弯后的管道与拐弯前的管道平行. 若第一个弯道处 $\angle B = 142^\circ$, 那么第二个弯道处 $\angle C$ 为多少度? 为什么?

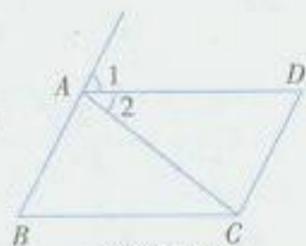
2. 如图, 已知 $AB \parallel CD, AD \parallel BC$. 填空:

(1) $\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle 1 = \underline{\hspace{2cm}}$ (两直线平行, 内错角相等);

(2) $\because AD \parallel BC$ (已知),

$\therefore \angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ().



(第 2 题)

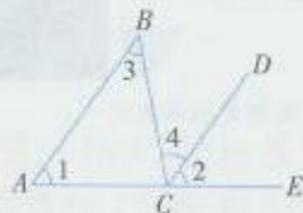
3. 如图, 已知 $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = 65^\circ$, 求 $\angle 4$ 的度数.



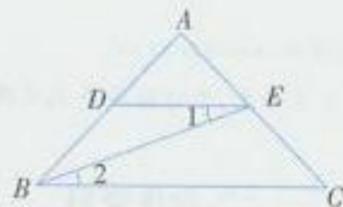
作业题
ZUOYETI

A 组 1. 如图, 若 $\angle 1 = \angle 2$, 则 $\underline{\hspace{2cm}} \parallel \underline{\hspace{2cm}}$ (),

$\therefore \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (两直线平行, 内错角相等).



(第 1 题)



(第 2 题)

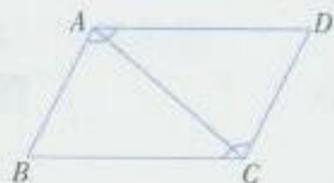
2. 如图, D, E 分别是 AB, AC 上的点.

若 $\angle 1 = \angle 2$,

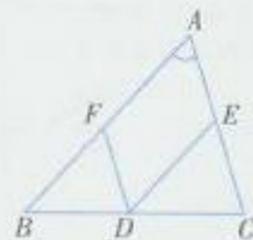
则 $\underline{\hspace{2cm}} \parallel \underline{\hspace{2cm}}$ (),

$\therefore \angle EDB + \angle ABC = \underline{\hspace{2cm}}$ ().

3. 如图, 已知 $AD \parallel BC, \angle BAD = \angle BCD$. 请说明 AB 与 CD 平行的理由.



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图, D 是 BC 上的一点, $DE \parallel AB$, 交 AC 于点 $E, DF \parallel AC$, 交 AB 于点 F . 若 $\angle A = 60^\circ$, 求 $\angle FDE$ 的度数.

B 组 5. 一船从 O 处出发, 沿北偏东 60° 方向行驶至 A , 然后向正东方向行驶至 C 后又改变航向, 朝与出发时相反的方向行驶至 B . 请画出该船的航线示意图, 并求 $\angle ACB$ 的度数.

6. 如图, 已知 $BC \parallel AD$. 将线段 CD 作怎样的平移变换, 使图形出现一对全等三角形? 请画出经变换后的图形, 并说明理由.



(第 6 题)

1.4

平行线之间的距离



HEZUOXUEXI

为了安全,平行的两条高压线之间的距离都有明确规定.



合作学习

HEZUOXUEXI

请任意画两条互相平行的直线 a, b .

(1) 在直线 a 上,任意取两点 A, B (如图1-16),分别作 $AC \perp b$ 于点 $C, BD \perp b$ 于点 D . 量出线段 AC, BD 的长,你得到什么结果?

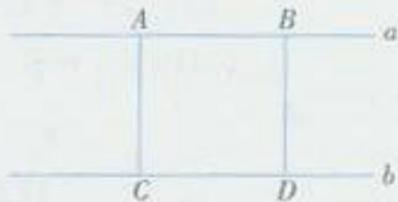


图 1-16

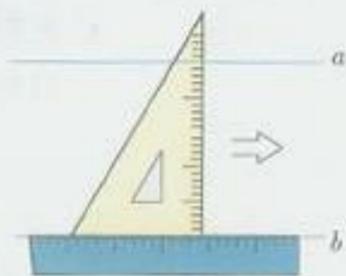


图 1-17

(2) 如图1-17,把一把三角尺的一条直角边沿着直线 b 移动. 观察三角尺的另一条直角边与直线 a 交点处的刻度,刻度改变吗? 通过上述实验,你发现了什么?

一般地,我们得到下面的结论:

两条平行线中,一条直线上的点到另一条直线的距离处处相等.

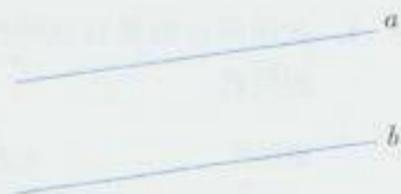
这个距离就叫做这两条平行线之间的距离. 例如,图1-16中,线段 AC, BD 的长相等,它就是平行线 a, b 之间的距离.



做一做

ZUOYIZUO

如图,直线 $a \parallel b$. 请量出这两条平行线之间的距离.



例 已知直线 l (如图1-18). 把这条直线平移,使经平移所得的像与直线 l 的距离为 1.5 cm , 求作直线 l 平移后所得的像.

解 如图1-18.

1. 在直线 l 上任取一点 A .
2. 作 $AP \perp l$.
3. 在 AP 上截取线段 $AB = 1.5 \text{ cm}$.
4. 过点 B 作直线 $l' \parallel l$.

l' 与 l 的距离就是线段 AB 的长 1.5 cm , 所以 l' 就是所求直线 l 平移后所得的像.

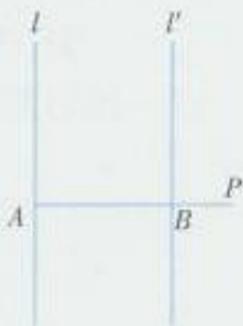


图 1-18

想一想

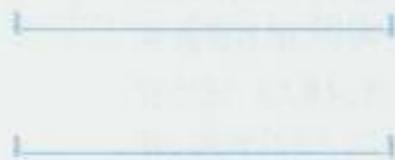
此例中,你能作出几条符合要求的直线?



课内练习

KENEILIANXI

1. 根据有关规定,两条平行的10千伏高压电线之间的距离必须在3米以上. 设计图纸上两条10千伏的高压电线如图,它符合规定吗? 为什么?



比例尺: 1:300

(第1题)



(第2题)

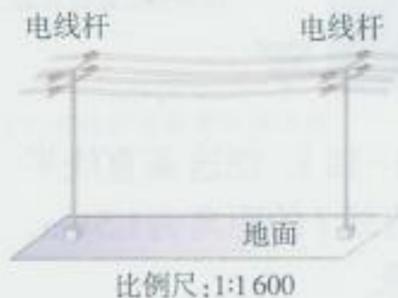
2. 如图,把直线 a 沿箭头方向平移 1.5 cm , 得直线 b . 这两条直线之间的距离是 1.5 cm 吗? 请说明理由.



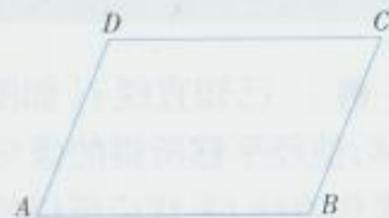
作业题

ZUOYETI

- A 组** 1. 如图所示的是马路两侧的电线杆, 请量出两根电线杆之间的距离.



(第1题)

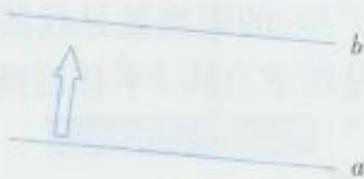


(第2题)

2. 如图, $AB \parallel CD, AD \parallel BC$. 请过点 B 作 AB 与 CD 之间的垂线段, 并量出 AD 与 BC 之间的距离.
3. 已知直线 l 如图, 求作一条直线 m , 使 l 与 m 的距离为 1.6 cm (只需作一条, 要求写出作法).



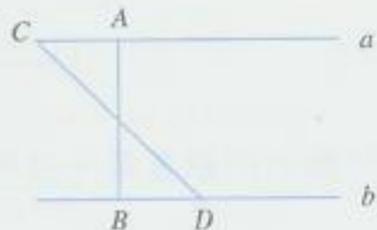
(第3题)



(第4题)

4. 如图, 直线 b 是直线 a 沿箭头方向平移所得的像. 请度量 a, b 之间的距离.

- B 组** 5. 如图, 直线 $a \parallel b, A, C$ 是直线 a 上的两点, B, D 是直线 b 上的两点, $AB \perp b$. 试比较线段 CD 与 AB 的长短, 并说明理由.



(第5题)

小结

1. 两条直线被第三条直线所截, 构成的8个角中(如图1-19), 像_____和_____这样的一对角叫做同位角, 像_____和_____这样的一对角叫做内错角, 像 $\angle 3$ 和 $\angle 6$ 这样的一对角叫做_____.

2. 平行线的判定:

_____相等, 两直线平行.

_____相等, 两直线平行.

_____互补, _____.

3. 平行线的性质:

两直线平行, _____.

两直线平行, _____相等.

两直线平行, 同旁内角_____.

4. 两条平行线中, 一条直线上的点到另一条直线的距离, 叫做这两条_____.

5. 主要方法和技能

(1) 判定两条直线平行;

(2) 度量两条平行线之间的距离;

(3) 平移已知直线, 使所得的像与已知直线的距离等于已知长.

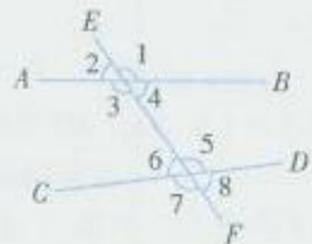
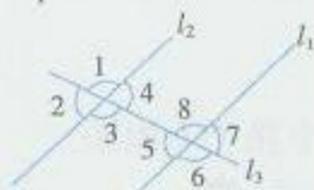


图1-19

目标与评定

目标 1

(1.1节, 1.2节)



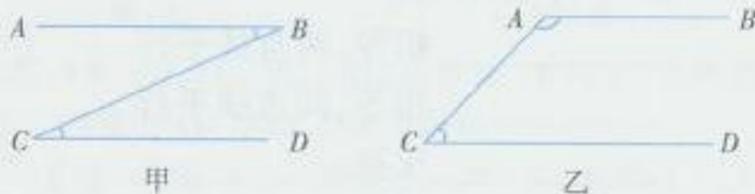
(第1题)

- 了解同位角、内错角、同旁内角的意义.
- 掌握平行线的判定方法.

1. 已知直线 l_1, l_2, l_3 的位置如图. 说出图中两对同位角, 一对内错角, 所有同旁内角.

2. 填空:

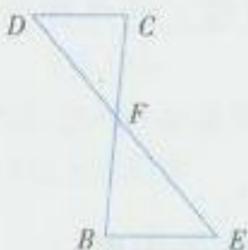
- (1) 如图甲, $\angle B = \angle C$ (已知),
则 $\underline{\hspace{2cm}} \parallel \underline{\hspace{2cm}}$ ();
- (2) 如图乙, $\angle A + \angle C = 180^\circ$ (已知),
则 $\underline{\hspace{2cm}} \parallel \underline{\hspace{2cm}}$ ().



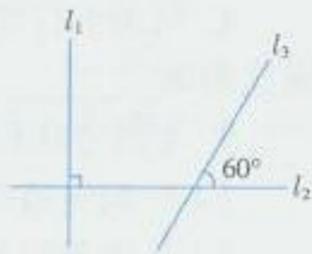
(第2题)

3. 第1题图中, 请再添上一个适当的条件, 使得 $l_1 \parallel l_2$.

4. 如图, $\angle E = 50^\circ, \angle EFB = 45^\circ, \angle C = 85^\circ$. 判断 CD 与 BE 是否平行, 并说明理由.



(第4题)



(第5题)

5. 已知直线 l_1, l_2, l_3 如图, $l_1 \perp l_2$. 请将直线 l_3 作轴对称变换, 使得到的像和直线 l_1 平行. 说出这个变换, 并作出图形.

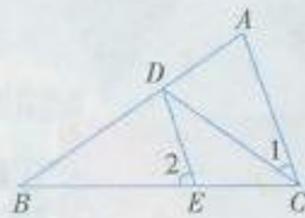
目标 2

(1.3节, 1.4节)

- 掌握平行线的性质.
- 体会两条平行线之间的距离的意义, 会度量两条平行线之间的距离.



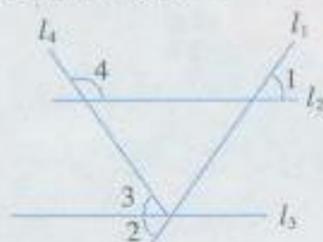
6. 如图, CD 平分 $\angle ACB$, $DE \parallel AC$, 且 $\angle 1 = 35^\circ$, 则 $\angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 度.



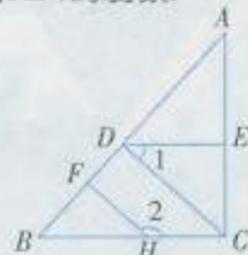
(第6题)

7. 一船沿正东方向航行, 行至 A 处折向南偏东 60° 方向航行, 行至 B 处后, 若该船仍向正东方向行驶, 问应如何调整航向? 画出示意图, 并说明理由.

8. 如图, 已知 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 55^\circ$, 求 $\angle 4$ 的度数.



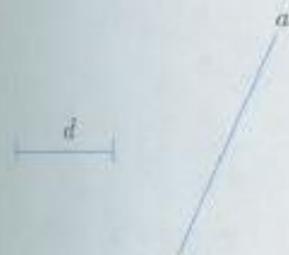
(第8题)



(第9题)

9. 如图, 已知 $AC \perp BC, CD \perp AB, DE \perp AC$, $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补. 判断 HF 与 AB 是否垂直, 并说明理由.

10. 已知直线 a 和线段 d (如图). 求作一条直线 b , 使 $b \parallel a$, 且与直线 a 的距离等于 d (只要求作出1条).



(第10题)

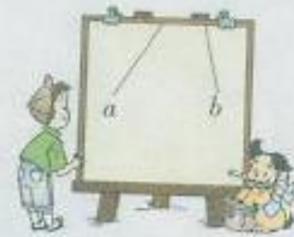
目标 3

- 会运用平行线的知识解决有关的简单问题.

11. 台球运动中, 如果母球 P 击中桌边点 A , 经桌边反弹后击中相邻的另一条桌边, 再次反弹, 那么母球 P 经过的路线 BC 与 PA 平行吗? 请说明你判断的理由.



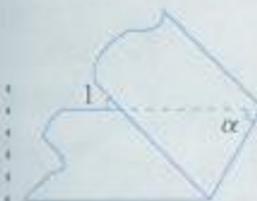
(第11题)



(第12题)

12. 直线 a, b 所成的角跑到画板外面去了, 你有什么办法量出这两条直线所成的角的度数? 请说出这两条直线所成的角的度数.

13. 将一条两边沿互相平行的纸带按如图折叠. 设 $\angle 1 = x$ 度, 请用关于 x 的代数式表示 $\angle \alpha$ 的度数.



(第13题)



等腰三角形和直角三角形这两种特殊三角形有许多有趣的性质。正由于这些性质，使得它们有着广泛的应用，特别是在建筑物的设计中。

本章将学习等腰三角形、直角三角形、勾股定理和直角三角形全等的判定，以及它们的一些简单应用。



CONTENTS

目录

| | |
|------------------------|----|
| 2.1 等腰三角形 | 22 |
| 2.2 等腰三角形的性质 | 24 |
| 2.3 等腰三角形的判定 | 27 |
| 2.4 等边三角形 | 30 |
| 2.5 直角三角形 | 33 |
| 2.6 探索勾股定理 | 38 |
| ● 阅读材料 从勾股定理到图形面积关系的拓展 | 44 |
| 2.7 直角三角形全等的判定 | 46 |
| ● 小结 | 50 |
| ● 目标与评定 | 51 |

等腰三角形



DEYUANLIJIANXING

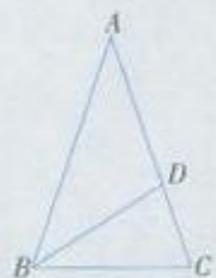
等腰三角形的应用在人们的生活中随处可见,如在许多建筑物的结构中,我们可以找到等腰三角形的形状.

在小学我们已经学过,有两边相等的三角形叫做等腰三角形(isosceles triangle),如图2-1.



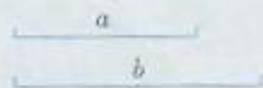
图 2-1

做一做



(第1题)

- 如图,点 D 在 AC 上, $AB=AC$, $AD=BD$. 你能在图中找到几个等腰三角形? 说出每个等腰三角形的腰、底边和顶角.
- 已知线段 a, b (如图). 用直尺和圆规作等腰三角形 ABC , 使 $AB=AC=b, BC=a$.



(第2题)

合作学习

在透明纸上任意画一个等腰三角形 ABC , 画出它的顶角平分线 AD (如图 2-2), 然后沿着 AD 所在的直线把 $\triangle ABC$ 对折 (如图 2-3), 你发现了什么? 由此, 你得出什么结论?

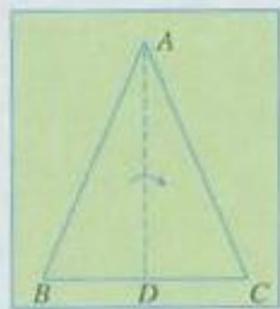


图 2-2

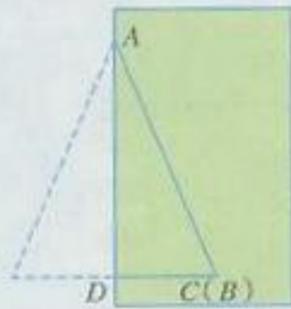


图 2-3

等腰三角形是轴对称图形, 顶角平分线所在的直线是它的对称轴.

例 如图 2-4, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, D, E 分别是 AB, AC 上的点, 且 $AD=AE$. AP 是 $\triangle ABC$ 的角平分线. 点 D, E 关于 AP 对称吗? DE 与 BC 平行吗? 请说明理由.

解 点 D, E 关于 AP 对称, 且 $DE \parallel BC$. 理由如下: 因为 AP 是 $\angle BAC$ 的平分线, $AB=AC$, $AD=AE$, 则当把图形沿直线 AP 对折时, 线段 AB 与 AC 重合, 线段 AD 与 AE 重合, 所以点 B, C 关于直线 AP 对称, 点 D, E 也关于直线 AP 对称, 所以 $BC \perp AP, DE \perp AP$, 所以 $DE \parallel BC$.

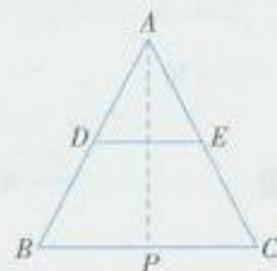


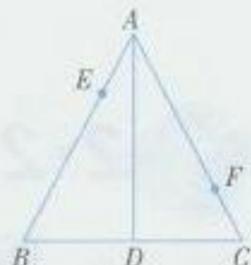
图 2-4

课内练习



(第1题)

- 如图, 五角星中有 _____ 个等腰三角形.
- 如图, AD 是等腰三角形 ABC 的角平分线, E, F 分别是 AB, AC 上的点. 请分别作出 E, F 关于 AD 的对称点.



(第2题)

在平面内, 分别用 3 根、5 根、6 根火柴棒首尾顺次相接, 能搭成什么形状的三角形? 通过尝试, 完成下面的表格. 7 根火柴棒呢? 8 根呢? 9 根呢? 你发现了什么规律?

| 火柴数 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|-------|-------|---|---|---|---|
| 示意图 | | | | | | |
| 形状 | 等边三角形 | 等腰三角形 | | | | |





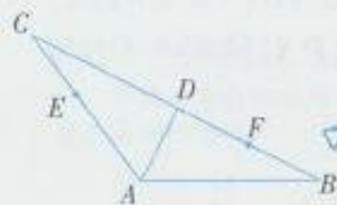
作业题

ZUOYETI

A组 1. 已知等腰三角形的两边长分别是4和6,则它的周长是()

(A) 14. (B) 15. (C) 16. (D) 14或16.

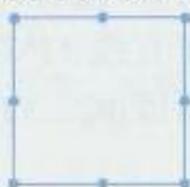
2. 作一个等腰三角形,使它的腰长为3 cm,底边长为2 cm(只要求作出图形).



(第3题)

3. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, AD 是角平分线, E,F 分别是 AC,BC 上的点.求作点 E,F 关于直线 AD 的对称点(只要求作出图形).

B组 4. 已知等腰三角形一腰上的中线将它的周长分成15 cm和6 cm两部分,求等腰三角形的底边长.



(第5题)

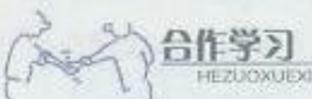
C组 5. 如图,正方形上给定8个点,以这些点为顶点,能构成多少个等腰三角形?

2·2

等腰三角形的性质

DEIYAYIFAN JIAXINGZEXINSHI

将一把三角尺和一个重锤如图放置,就能检查一根横梁是否水平.你知道为什么吗?



合作学习

HEZUOXUEXI

如图2-5,在等腰三角形 ABC 中, $AB=AC$, AD 平分 $\angle BAC$,交 BC 于 D .

(1) 若将 $\triangle ABD$ 作关于直线 AD 的轴对称变换,所得的像是什么?

(2) 找出图中的全等三角形,以及

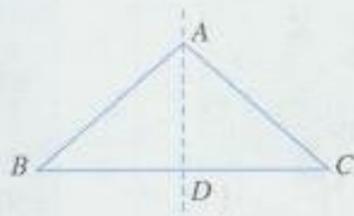


图2-5

所有相等的线段和相等的角.你的依据是什么?

(3) 你有什么发现?能得出等腰三角形的哪些性质?

等腰三角形有下面的性质:

等腰三角形的两个底角相等.也就是说,在同一个三角形中,等边对等角.

等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线和高三线合一,简称等腰三角形三线合一.

应用上述性质能解决有关等腰三角形的许多问题.

例1 如图2-6,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle A=50^\circ$,求 $\angle B, \angle C$ 的度数.

解 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\because AB=AC,$$

$$\therefore \angle B=\angle C \text{ (等腰三角形的两个底角相等).}$$

$$\because \angle A+\angle B+\angle C=180^\circ, \angle A=50^\circ,$$

$$\therefore \angle B=\angle C=\frac{180^\circ-\angle A}{2}=\frac{180^\circ-50^\circ}{2}=65^\circ.$$

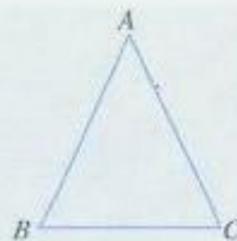


图2-6

例2 已知线段 a, h (如图2-7),用直尺和圆规作等腰三角形 ABC ,使底边 $BC=a, BC$ 边上的高为 h .

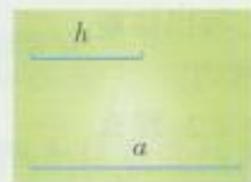


图2-7

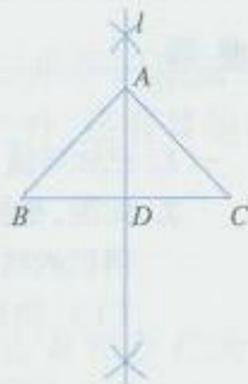


图2-8

分析 要作出等腰三角形 ABC ,关键是作出顶点 A .设底边 BC 上的高为 AD ,根据等腰三角形三线合一的性质, AD 也是底边的垂直平

分线. 因此, 只要作 BC 的垂直平分线 l , 然后在 l 上截取 $DA=h$, 连结 AB, AC , 就得到所求作的等腰三角形.

作法 如图2-8.

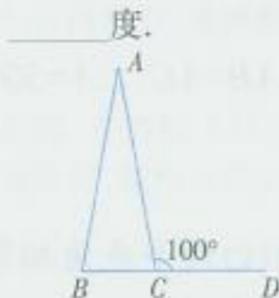
1. 作线段 $BC=a$.
2. 作线段 BC 的垂直平分线 l , 交 BC 于点 D .
3. 在直线 l 上截取 $DA=h$, 连结 AB, AC .

$\triangle ABC$ 就是所求作的等腰三角形 (根据什么?).

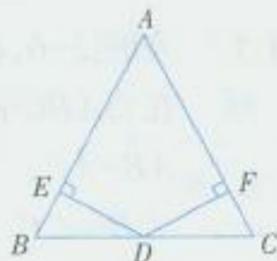


课内练习
KENEILIANXI

1. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 外角 $\angle ACD=100^\circ$, 则 $\angle B=$ 度.



(第1题)



(第2题)

2. 如图, 在等腰三角形 ABC 中, $AB=AC$, D 为 BC 的中点, 则点 D 到 AB, AC 的距离相等. 请说明理由.
3. 节前图中, 如果重锤线经过三角尺斜边的中点, 那么可以判定梁是水平的. 你能说明理由吗?



作业题
ZUOYETI

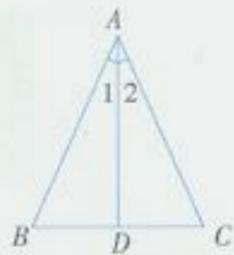
1. 已知等腰三角形的一个底角为 30° , 求它的顶角的度数.

2. 如图, 根据下列已知条件, 写出你能得到的结论, 并填写在空格内:

(1) 如果 $AB=AC, \angle 1=\angle 2$, 那么 _____;

(2) 如果 $AB=AC, AD \perp BC$, 那么 _____;

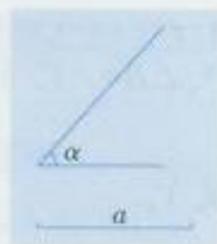
(3) 如果 $AB=AC, BD=CD$, 那么 _____.



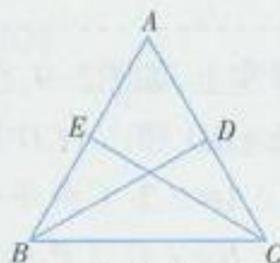
(第2题)

3. 等腰三角形的顶角是底角的 2 倍, 求各个内角的度数.

4. 如图, 已知 $\angle \alpha$ 和线段 a , 用直尺和圆规作一个等腰三角形, 使它的顶角等于 $\angle \alpha$, 底边上的中线长等于 a .



(第4题)

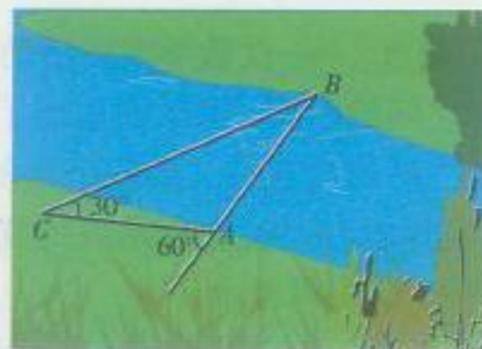


(第5题)

5. 如图, BD, CE 是等腰三角形 ABC 两腰上的中线, BD 与 CE 相等吗? 请说明理由.

2.3

等腰三角形的判定



DEHYAIGANJIAOXINGEPANDING

如图所示, 量出 AC 的长, 就可知道河的宽度 AB . 你知道为什么吗?

根据等腰三角形的意义, 如果一个三角形的两条边相等, 那么就可判定这个三角形是等腰三角形. 除此之外, 还有其他判定方法吗?



合作学习
HEZUOXUEXI

请在纸上任意画线段 BC , 分别以点 B 和点 C 为顶点, 以 BC 为一边, 在 BC 的同侧画两个相等的角, 两角的终边相交于点 A . 因此, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=\angle C$. 量一量, 线段 AB 与 AC 相等吗? 其他同学的结果与你的相同吗? 你发现了什么规律?

一般地,等腰三角形有下面的判定方法:

如果一个三角形有两个角相等,那么这个三角形是等腰三角形.简单地说,在同一个三角形中,等角对等边.

事实上,如图2-9,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=\angle C$.作 $\triangle ABC$ 的角平分线 AD ,则在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} \angle 1=\angle 2 \text{ (角平分线的意义),} \\ \angle B=\angle C \text{ (已知),} \\ AD=AD \text{ (公共边),} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD \text{ (AAS),}$$

$$\therefore AB=AC \text{ (全等三角形的对应边相等),}$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 是等腰三角形.}$$

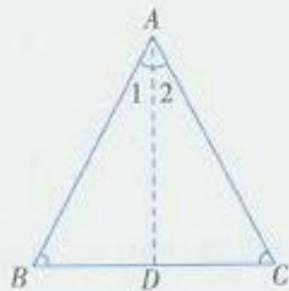


图 2-9

例 1 一次数学实践活动的内容是测量河宽,如图2-10,即测量 A, B 之间的距离.同学们想出了许多方法,其中小聪的方法是:从点 A 出发,沿着与直线 AB 成 60° 角的 AC 方向前进至 C ,在 C 处测得 $\angle C=30^\circ$.量出 AC 的长,它就是河的宽度(即 A, B 之间的距离).这个方法正确吗?请说明理由.

解 小聪的测量方法正确.理由如下:

$$\because \angle DAC = \angle B + \angle C \text{ (三角形外角的性质),}$$

$$\therefore \angle ABC = \angle DAC - \angle C = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle C,$$

$$\therefore AB=AC \text{ (在同一个三角形中,等角对等边).}$$

想一想
你还有其他测量方法吗?

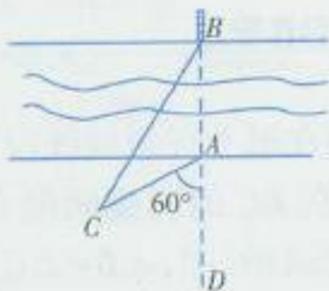


图 2-10

例 2 如图2-11, BD 是等腰三角形 ABC 的底边 AC 上的高, $DE \parallel BC$,交 AB 于点 E .判断 $\triangle BDE$ 是不是等腰三角形,并说明理由.

分析 由 BD 是底边 AC 上的高,可得 $\angle 1=\angle 2$;由 $DE \parallel BC$,得 $\angle 1=\angle 3$,则 $\angle 2=\angle 3$,可判定 $\triangle BDE$ 是等腰三角形.

请你自己完成说理过程.

(可与你的同伴交流)

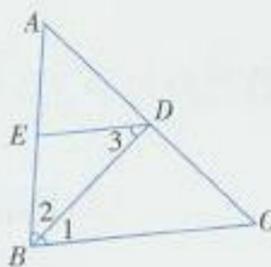


图 2-11



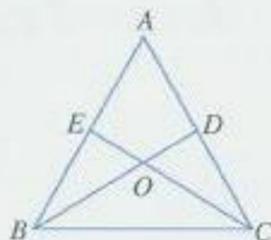
课内练习

KENEILIANXI

1. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是 AB, AC 上的点, $DE \parallel BC$, $\angle 1=\angle 2$.说明 $\triangle ABC$ 是等腰三角形的理由.



(第1题)



(第2题)

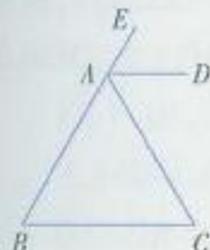
2. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是 AC, AB 上的点, BD, CE 交于点 O .若 $\angle BEO = \angle CDO$, $BE = CD$,问 $\triangle ABC$ 是等腰三角形吗?请说明理由.



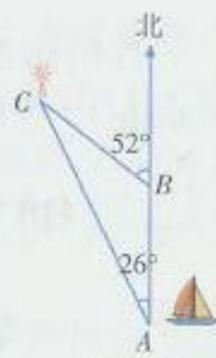
作业题

ZUOYETI

- A组** 1. 如图,上午8时,一艘船从 A 处出发,以15海里/时的速度向正北方向航行,9时45分到达 B 处.从 A 处测得灯塔 C 在北偏西 26° 方向,从 B 处测得灯塔 C 在北偏西 52° 方向,求 B 处到灯塔 C 的距离.



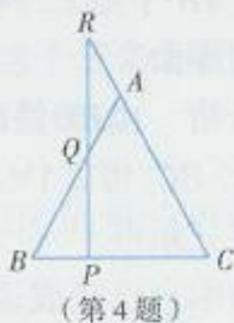
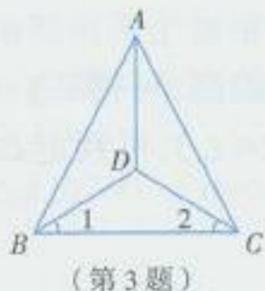
(第2题)



(第1题)

2. 如图, AD 平分 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle EAC$, $AD \parallel BC$,则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形吗?说明你的理由.

3. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle 1=\angle 2$,则 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 全等吗?为什么?



- E组** 4. 如图, P 是等腰三角形 ABC 的底边 BC 上一点.过点 P 作 BC 的垂线,交 AB 于点 Q ,交 CA 的延长线于点 R ,则 AR 与 AQ 相等吗?请说明理由.

- C组** 5. 把一张顶角为 36° 的等腰三角形纸片剪两刀,分成3张小纸片,使每张小纸片都是等腰三角形.你能办到吗?请画示意图说明剪法.



2.4 等边三角形



DEHGBAHSANLIADXMG

连结飞机螺旋桨的外端,能得到什么特殊三角形?

我们知道,三边都相等的三角形叫做**等边三角形**(equilateral triangle).等边三角形是特殊的等腰三角形,也叫**正三角形**.



合作学习
HEZUOXUEXI

讨论等边三角形有哪些特殊性质.

建议从以下几方面进行探索:

1. 等边三角形的内角都相等吗?为什么?

2. 等边三角形每条边上的中线、高和所对角的平分线都三线合一吗?为什么?

3. 等边三角形有几条对称轴?它们有什么特点(可以通过作图、观察来发现)?

4. 具备什么条件的三角形是等边三角形?根据什么?
请把上面探索的结果整理出来,并与其他同学交流.

一般地,我们有下面的结论:

等边三角形的内角都相等,且等于 60° ;反过来,三个内角都等于 60° 的三角形一定是等边三角形.等边三角形是轴对称图形,等边三角形每条边上的中线、高和所对角的平分线都三线合一,它们所在的直线都是等边三角形的对称轴.

例 如图2-12,等边三角形 ABC 中,三条内角平分线 AD , BE , CF 相交于点 O .

(1) $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ 和 $\triangle AOC$ 有什么关系?请说明理由;

(2) 求 $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle AOC$ 的度数.将 $\triangle ABC$ 绕点 O 旋转,问要旋转多少度,就能和原来的三角形重合(只要求说出一个旋转度数)?

解 (1) $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COA$ 彼此全等.理由如下:因为 AD , BE , CF 是等边三角形 ABC 的角平分线,所以它们所在的直线也就是等边三角形 ABC 的三条对称轴,则 $\triangle AOB$ 与 $\triangle AOC$ 关于直线 AD 成轴对称,所以 $\triangle AOB \cong \triangle AOC$.同理, $\triangle AOB \cong \triangle COB$.也就是说, $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle AOC$ 彼此全等.

(2) 由 $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle AOC$ 彼此全等,得
 $\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC$ (全等三角形的对应角相等),

$OA = OB = OC$ (根据什么?).

$\therefore \angle AOB + \angle BOC + \angle AOC = 360^\circ$,

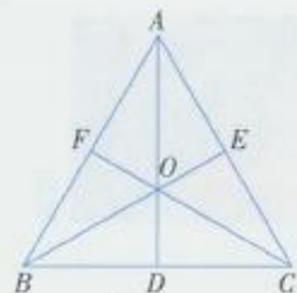


图 2-12

$$\therefore \angle AOB = \angle BOC = \angle AOC = \frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ.$$

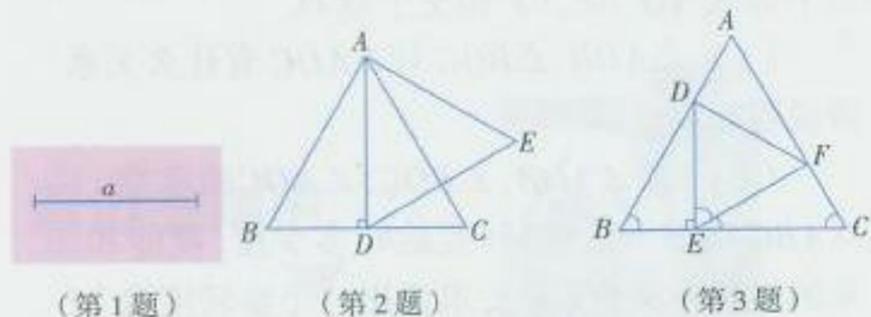
由此可知,将 $\triangle ABC$ 绕点 O 旋转 120° ,就能和原来的三角形重合.

课内练习

1. 等边三角形三条对称轴的交点到各边的距离都相等吗? 请说明理由.
2. 飞机的螺旋桨(如节前图)三个叶片的长度相等,每两个叶片(中心线)所成的角为 120° . 如果用线段把每两个叶片的外端连结起来,那么所得的三角形是正三角形吗? 请说明理由.

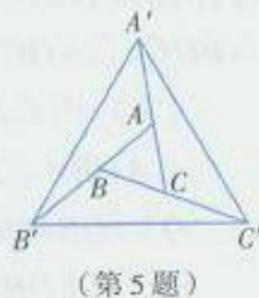
作业题

- A组**
1. 以已知线段 a 为边长,用直尺和圆规作一个正三角形.
 2. 如图,在等边三角形 ABC 中, $AD \perp BC$ 于 D . 以 AD 为一边,作等边三角形 ADE ,则 DE 与 AC 垂直吗? 请说明理由.



- (第1题) (第2题) (第3题)
3. 如图, D, E, F 分别是等边三角形 ABC 的边 AB, BC, AC 上的点,且 $DE \perp BC, EF \perp AC, DF \perp AB$,则 $\triangle DEF$ 为等边三角形. 请说明理由.

- B组**
4. 有一个角等于 60° 的等腰三角形一定是等边三角形. 请说明理由.
 5. 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形,分别延长 CA, AB, BC 到 A', B', C' ,使 $AA' = BB' = CC'$. $\triangle A'B'C'$ 是等边三角形吗? 请说明理由.



2.5

直角三角形



71.1WZANLADKRE

这幅图画的是云南西双版纳傣族干栏房,你能从图中找出形状为直角三角形的部分吗?

我们知道,有一个角是直角的三角形叫做**直角三角形**(right triangle),直角三角形可以用符号“ $Rt\triangle$ ”表示,如图2-13的三角形可记为 $Rt\triangle ABC$. 在现实生活中,我们常常会接触到各种各样的直角三角形,如广告牌的支架,电线杆的固定装置,楼梯的侧面(图2-14)等.

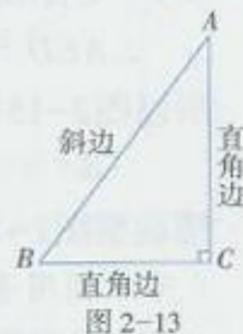


图 2-13



图 2-14

合作学习

请讨论下面的问题:

1. 直角三角形的内角有什么特点?
2. 怎样判定一个三角形是直角三角形?

我们有下面的结论:

直角三角形的两个锐角互余. 反过来,有两个角互余的三角形是直角三角形.

例 1 如图2-15, CD 是 $Rt\triangle ABC$ 斜边上的高. 请找出图中各对互余的角.

解 $\because CD \perp AB$,

$\therefore \triangle ACD, \triangle BCD$ 是 $Rt\triangle$.

又已知 $\triangle ABC$ 是 $Rt\triangle$,

$\therefore \angle A$ 与 $\angle B, \angle A$ 与 $\angle ACD, \angle B$ 与 $\angle BCD$

互余 (直角三角形的两个锐角互余).

又 $\because \angle ACB = Rt\angle$,

$\therefore \angle ACD$ 与 $\angle BCD$ 互余.

所以图2-15中一共有4对互余的角.

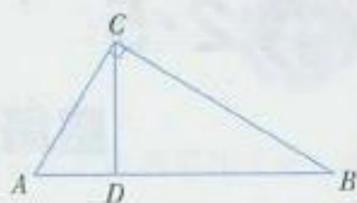


图 2-15

请观察图2-16中的 $\triangle ABC$, 这个三角形有什么特点?

(可以利用量角器、三角尺等工具)

一般地, 两条直角边相等的直角三角形叫做等腰直角三角形. 等腰直角三角形的两个底角相等, 等于 45° (根据什么?).

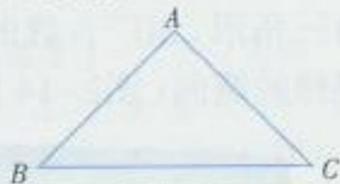


图 2-16

例 2 如图2-17, 在等腰直角三角形 ABC 中, AD 是斜边 BC 上的高, 则 $AD=BD=CD$. 请说明理由.

解 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle B = \angle C = 45^\circ$.

$\because AD \perp BC$,

$\therefore \angle CAD + \angle C = 90^\circ$ (根据什么?),

$\therefore \angle CAD = 90^\circ - \angle C$

$$= 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle C.$$

$\therefore AD = DC$ (在同一个三角形中, 等角

对等边).

同理, $AD = BD$.

$\therefore AD = BD = CD$.

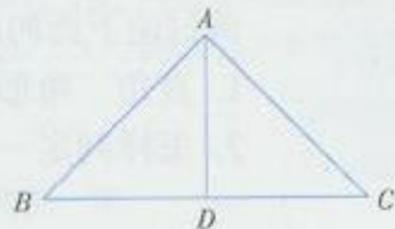
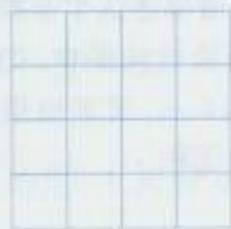


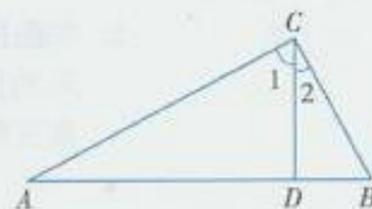
图 2-17

课内练习
KENEILIANXI

1. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, CD \perp AB, \angle A : \angle B = 1 : 2$, 求 $\angle ACD, \angle BCD$ 的度数.
2. 在如图的方格上画3个各不全等的直角三角形, 使其顶点都在方格的顶点上, 并用符号 " $Rt\triangle$ " 和字母将它们表示出来.



(第2题)



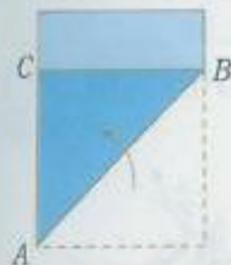
(第3题)

3. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 上一点. 若 $\angle 1 = \angle B, \angle A = \angle 2$, 则 $\triangle ABC$ 是 $Rt\triangle$. 请说明理由.

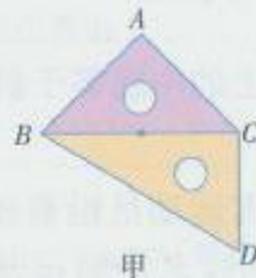


作业题
ZUOYETI

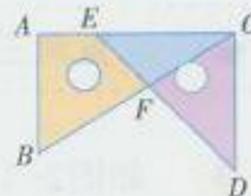
- A组**
1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ, \angle B = 3\angle C$, 求 $\angle B, \angle C$ 的度数.
 2. 用一副三角尺拼出甲、乙两个图形, 求:
 - (1) 图甲中, $\angle ABD$ 的度数;
 - (2) 图乙中, $\angle DCF, \angle CFD, \angle AEF$ 的度数.



(第3题)



甲



乙

(第2题)

3. 将一张长方形纸片按图示方法折叠, 得到的 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形. 请说明理由.
4. 已知一个三角形的三个内角之比为 $1:1:2$, 求这个三角形三个内角的度数, 并说明这是什么形状的三角形.

B组 5. 如图,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$.



(第5题)

(1) 以直角边 BC 所在的直线为对称轴,将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 作轴对称变换,作出变换所得的像;再以 AC 所在的直线为对称轴,将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的像作轴对称变换,作出所得的像;

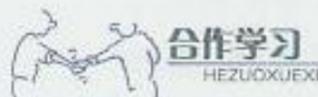
(2) 经上面两次轴对称变换后所得的像能否用一次旋转变换完成?如果能,请描述这个变换.

6. 如图的七巧板结构图中,如果大正方形的边长为 4 cm ,请求出最小一块直角三角形的面积.



(第6题)

2



合作学习
HEZUOXUEXI

任意画一个直角三角形,作出斜边上的中线,并利用圆规比较中线与斜边的一半的长短.你发现了什么?再画几个直角三角形试一试,你的发现相同吗?

一般地,直角三角形有以下性质:

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

例3 如图2-18,一名滑雪运动员沿着倾斜角为 30° 的斜坡,从 A 滑行至 B . 已知 $AB=200\text{ m}$,问这名滑雪运动员的高度下降了多少 m ?

分析 如图2-18,作 $AC \perp BC$ 于 C ,这样问题就归结为求直角边 AC 的长. 由直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半,已知 $AB=200\text{ m}$,可得斜边上的中线等于 100 m . 添上这

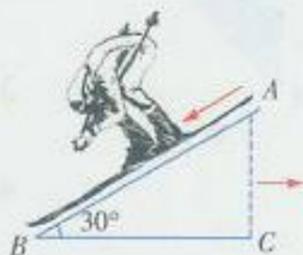


图2-18

条中线后,就构成含已知线段和所求线段的新三角形,由此找到未知量和已知量之间的关系.

解 如图2-19,作 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边上的中线 CD ,则

$$CD=AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 200=100(\text{m})$$

(直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半).

$$\therefore \angle B=30^\circ,$$

$\therefore \angle A=90^\circ-\angle B=90^\circ-30^\circ=60^\circ$ (直角三角形的两个锐角互余).

$\therefore \triangle ADC$ 是等边三角形 (为什么?).

$$\therefore AC=AD=100(\text{m}).$$

答:这名滑雪运动员的高度下降了 100 m .

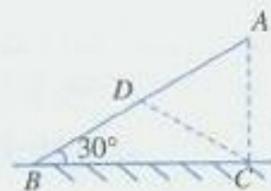


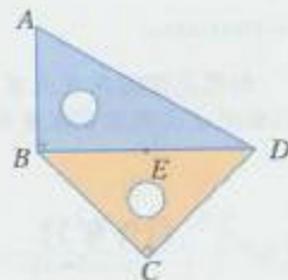
图2-19



课内练习
KENEILIANXI

1. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,斜边上的中线 $CD=5\text{ cm}$,则斜边 AB 的长是多少?

2. 如图是一副三角尺拼成的四边形 $ABCD$, E 为 BD 的中点. 点 E 与点 A, C 的距离相等吗? 请说明理由.

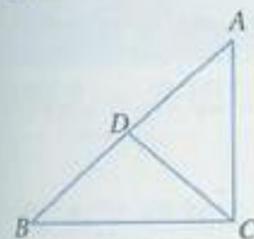


(第2题)



作业题
ZUOYETI

A组

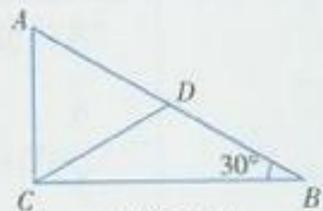


(第2题)

1. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,斜边 $AB=10\text{ cm}$,求斜边上的中线的长.

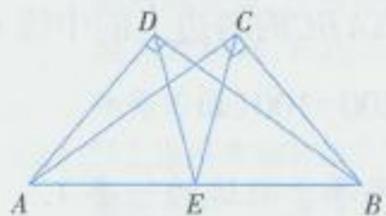
2. 如图,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, CD 是斜边 AB 上的中线, $\angle CDA=80^\circ$,求 $\angle A, \angle B$ 的度数.

3. 如图,一太阳能热水器受光面的一边 AB 长为 1.5 m ,倾斜角 $\angle ABC=30^\circ$,连杆 CD 经过 AB 的中点 D . 求支架 AC, CD 的长.

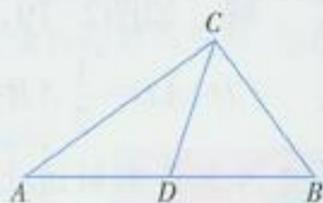


(第3题)

- B组** → 4. 如图, 已知 $AD \perp BD, AC \perp BC, E$ 为 AB 的中点. 试判断 DE 与 CE 是否相等, 并说明理由.



(第4题)



(第5题)

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, CD 是 AB 边上的中线, 且 $CD = \frac{1}{2}AB$. $\triangle ABC$ 是直角三角形吗? 请说明理由.

2.6

探索勾股定理



YANSHIYUJIAN

如图是2002年在北京召开的国际数学家大会(ICM-2002)的会标, 它的设计思路可追溯到3世纪中国数学家赵爽所使用的弦图. 用弦图证明勾股定理在数学史上有着重要的地位.



合作学习

HEZUOXUEXI

- 作三个直角三角形, 使其两条直角边长分别为3 cm和4 cm, 6 cm和8 cm, 5 cm和12 cm;
- 分别测量这三个直角三角形斜边的长;
- 根据所测得的结果填写下表:

| a | b | c | a^2+b^2 | c^2 |
|-----|-----|-----|-----------|-------|
| 3 | 4 | | | |
| 6 | 8 | | | |
| 5 | 12 | | | |

观察表中后两列的数据. 在直角三角形中, 三边长之间有什么关系? 再任意画一个直角三角形试一试.

一般地, 直角三角形的三条边长有下面的关系:

直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方.

即如果 a, b 为直角三角形的两条直角边长, c 为斜边长,

则 $a^2+b^2=c^2$.

我国早在三千多年前就知道直角三角形的这个性质. 古人称直角三角形直角边中较短的一边为勾, 较长的一边为股, 斜边为弦, 因此这一性质也称为**勾股定理**.

下面我们一起来探究勾股定理的正确性.

已知: $\text{Rt}\triangle ABC$ 的两条直角边长分别为 a, b , 斜边长为 c (如图2-20).

画一个边长为 c 的正方形 (如图2-21), 将4个与图2-20中的三角形全等的直角三角形纸片按如图2-21的位置放置, 则中间小正方形的边长为 $(b-a)$. 由大正方形的面积等于小正方形面积与4个直角三角形面积的和, 得

$$\begin{aligned} c^2 &= (b-a)^2 + 4 \times \frac{1}{2}ab \\ &= b^2 - 2ab + a^2 + 2ab \\ &= b^2 + a^2, \end{aligned}$$

即 $a^2+b^2=c^2$.

勾股定理揭示了直角三角形三边之间的关系, 是数学中最著名的定理之一, 在图形研究和生活、生产实践中有广泛的应用.

例1 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = \text{Rt}\angle$, $BC = a, AC = b, AB = c$.

- (1) 若 $a=1, b=2$, 求 c ;

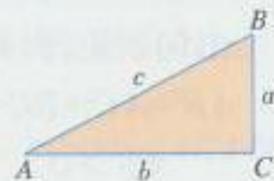


图2-20

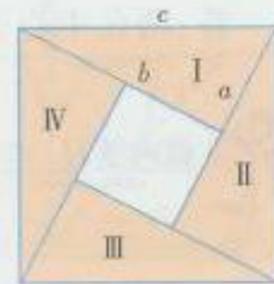


图2-21

(2) 若 $a=15, c=17$, 求 b .

解 (1) 根据勾股定理, 得 $c^2=a^2+b^2=1^2+2^2=5$.

$\because c > 0, \therefore c = \sqrt{5}$.

(2) 根据勾股定理, 得 $b^2=c^2-a^2=17^2-15^2=64$.

$\because b > 0, \therefore b = 8$.

例 2 图2-22是一个长方形零件图, 根据所给的尺寸(单位: mm), 求两孔中心 A, B 之间的距离.

分析 解决问题的关键是构造出含所求线段的直角三角形, 这样就可以用勾股定理求解.

解 过 A 作铅垂线, 过 B 作水平线, 两线交于点 C , 则

$\angle ACB = 90^\circ$,

$AC = 90 - 40 = 50$ (mm),

$BC = 160 - 40 = 120$ (mm).

由勾股定理, 得

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 50^2 + 120^2 = 16900$ (mm²).

$\because AB > 0,$

$\therefore AB = 130$ (mm).

答: 两孔中心 A, B 之间的距离为 130 mm.

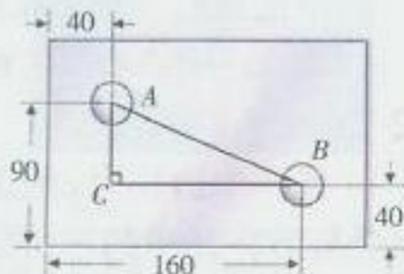


图 2-22



课内练习
KENEILIANXI

1. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = \text{Rt}\angle, AB = c, BC = a, AC = b$.

(1) 如果 $a = \frac{4}{5}, b = \frac{3}{5}$, 求 c ;

(2) 如果 $a = 12, c = 13$, 求 b ;

(3) 如果 $c = 34, a : b = 8 : 15$, 求 a, b .

2. 用刻度尺和圆规作一条线段, 使它的长度为 $\sqrt{3}$ cm.

3. 利用作直角三角形, 在数轴上表示点 $\sqrt{13}$.



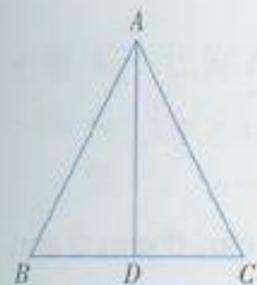
作业题
ZUOYETI

A组 1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = \text{Rt}\angle, BC = a, AC = b, AB = c$.

(1) 若 $a = 9, b = 12$, 求 c ;

(2) 若 $a = 9, c = 41$, 求 b ;

(3) 若 $c = 10, b = 5$, 求 a .



(第3题)

2. 用刻度尺和圆规作一条线段, 使它的长度为 $\sqrt{10}$ cm.

3. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$. 已知 $AB = 17, BC = 16$, 求:

(1) BC 边上的中线 AD 的长;

(2) $\triangle ABC$ 的面积.

4. 如图, 甲船以 15 千米/时的速度从港口 A 向正南方向航行, 乙船以 20 千米/时的速度, 同时从港口 A 向正东方向航行. 行驶 2 时后, 两船相距多远?

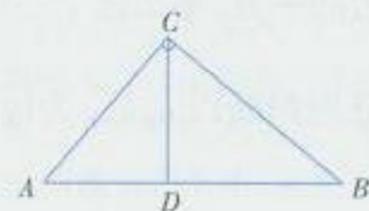


(第4题)

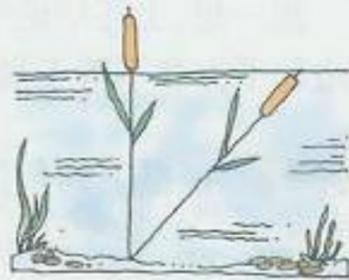


5. 等腰直角三角形中, 如果直角边长为 4 cm, 求斜边长; 如果斜边长为 4 cm, 求直角边长 (结果精确到 0.001 cm).

B组 6. 一个屋架形状如图. 已知 $AC = 10$ m, $BC = 12$ m, $AC \perp BC$, $CD \perp AB$ 于点 D . 求立柱 CD 的长和 D 的位置 (结果精确到 0.001 m).



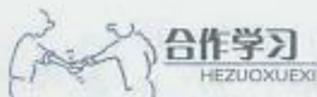
(第6题)



(第7题)

C组 7. 在《九章算术》中记载了一道有趣的数学题: “今有池方一丈, 葭生其中央, 出水一尺. 引葭赴岸, 适与岸齐, 问水深、葭长各几何?” 这道题的意思是说: 有一个边长为 1 丈的正方形水池, 在池的正中央长着一根芦苇, 芦苇露出水面 1 尺. 若将芦苇拉到池边中点处, 芦苇的顶端恰好到达水面. 问水有多深? 芦苇有多长? 请解这道题.

我们知道,直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方.反过来,如果一个三角形的两条边的平方和等于第三条边的平方,那么该三角形一定是直角三角形吗?



合作学习

HEZUOXUEXI

(1) 画三个三角形,使其边长分别为3 cm, 4 cm, 5 cm; 5 cm, 12 cm, 13 cm; 8 cm, 15 cm, 17 cm;

(2) 算一算较短两条边的平方和与最长一条边的平方是否相等.

由此你得到怎样的猜想?

一般地,我们有下面的结论:

●如果三角形中两边的平方和等于第三边的平方,那么这个三角形是直角三角形.

想一想,上述结论中,哪条边所对的角是直角? 如果三角形中较短两边的平方和不等最长边的平方,那么这个三角形是直角三角形吗?

例3 根据下列条件,分别判断以 a, b, c 为边的三角形是不是直角三角形.

(1) $a=7, b=24, c=25$; (2) $a=\frac{2}{3}, b=1, c=\frac{2}{3}$.

解 (1) $\because 7^2+24^2=25^2$,

\therefore 以7, 24, 25为边的三角形是直角三角形.

● 本册涉及一些结论的详细说明过程需用到更多的数学知识,我们将在以后介绍.

(2) $\because \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} \neq 1^2$,

\therefore 以 $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1$ 为边的三角形不是直角三角形.

例4 已知 $\triangle ABC$ 的三条边长分别为 a, b, c , 且 $a=m^2-n^2, b=2mn, c=m^2+n^2$ ($m>n, m, n$ 是正整数). $\triangle ABC$ 是直角三角形吗? 请说明理由.

解 $\because a=m^2-n^2, b=2mn, c=m^2+n^2$ ($m>n, m, n$ 是正整数),

$$\begin{aligned} \therefore a^2+b^2 &= (m^2-n^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \\ &= (m^2+n^2)^2 \\ &= c^2. \end{aligned}$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.



课内练习

KENEILIANXI

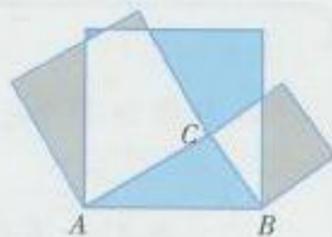
1. 根据下列条件,判断下面以 a, b, c 为边的三角形是不是直角三角形:

(1) $a=20, b=21, c=29$;

(2) $a=5, b=7, c=8$;

(3) $a=\sqrt{7}, b=\sqrt{3}, c=2$.

2. 如图,以 $\triangle ABC$ 的每一条边为边作三个正方形. 已知这三个正方形构成的图形中,灰色部分的面积与蓝色部分的面积相等,则 $\triangle ABC$ 是直角三角形吗? 请说明理由.



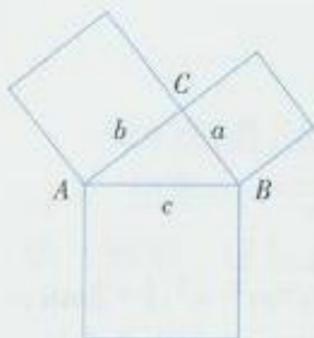
(第2题)



作业题

ZUOYETI

1. 根据下列条件,分别判断以 a, b, c 为边的三角形是不是直角三角形:

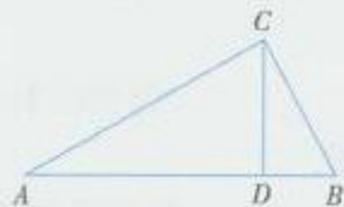


(第2题)

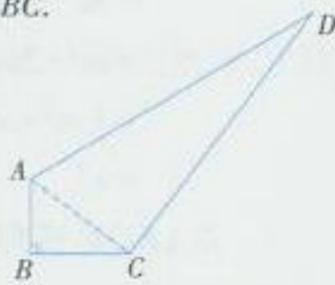
- (1) $a=7, b=8, c=10$;
- (2) $a=35, b=12, c=37$;
- (3) $a=\sqrt{41}, b=4, c=5$;
- (4) $a=3n, b=4n, c=5n$ (n 为正整数);
- (5) $a:b:c=5:12:13$.

2. 如图,最大正方形的面积等于较小两个正方形面积的和.由这三个正方形的边构成的 $\triangle ABC$ 是直角三角形吗?请说明理由.
3. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=4, BC=2, BD=1, CD=\sqrt{3}$.判断下列结论是否正确,并说明理由:

- (1) $CD \perp AB$;
- (2) $AC \perp BC$.

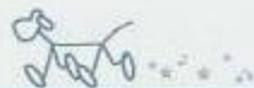


(第3题)



(第4题)

- E 组** 4. 如图,四边形 $ABCD$ 中, $AB=3, BC=4, CD=12, AD=13$,
 $\angle B=90^\circ$,求四边形 $ABCD$ 的面积.



从勾股定理到图形面积关系的拓展

我们知道,勾股定理反映了直角三角形三条边之间的关系: $a^2+b^2=c^2$.而 a^2, b^2, c^2 又可以看成是以 a, b, c 为边长的正方形的面积,因此,勾股定理也可以表述为:分别以直角三角形两条直角边为边长的两个正方形的面积之和,等于以斜边为边长的

正方形的面积.如图2-23, $S_1+S_2=S_3$.

如果以直角三角形的三条边 a, b, c 为边,向形外分别作正三角形(如图2-24),那么是否存在 $S_1+S_2=S_3$ 呢?

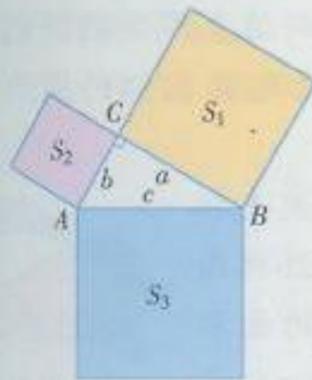


图2-23

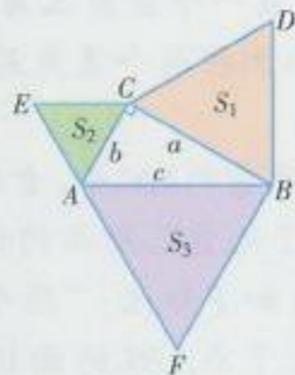


图2-24

根据正三角形的性质和勾股定理,不难求得正三角形 BCD

的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$,于是 $S_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

同理, $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2, S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

$\therefore S_1+S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)$.

$\because a^2+b^2=c^2$,

$\therefore S_1+S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = S_3$.

这说明,分别以直角三角形的三条边 a, b, c 为边向形外作正三角形,也存在 $S_1+S_2=S_3$.

类似地,上述结果是否适合其他图形?

例如,图2-25是分别以直角三角形的三边为直径作三个半圆,则 $S_1+S_2=S_3$ 成立吗?

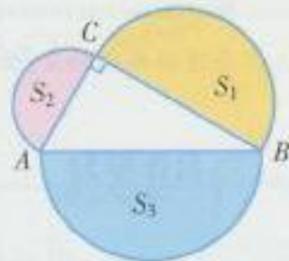


图2-25

再画几个类似的图试一试,结论成立吗?由此,你可以发现一个有趣的结论.其实,在欧几里得时代,人们就已经知道了勾股定理的一些拓展.例如,《几何原本》第六卷命题31就曾介绍:“在一个直角三角形中,在斜边上所画的任何图形的面积,等于在两个直角边上所画的与其相似的图形的面积之和.”

公元前约400年,古希腊的希波克拉底研究了他自己所画的形如图2-26的图形,得出如下结论:“两个月牙形的面积之和,等于 $\triangle ABC$ 的面积,即 $S_1+S_2=S_3$.”你能说明理由吗?

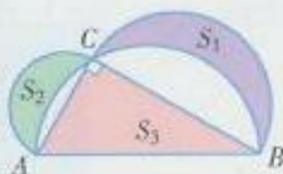


图 2-26

一般地,直角三角形全等还有下面的判定方法:

斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等(可以简写成“斜边、直角边”或“HL”).

下面我们来说明理由.

如图2-27,在 $\triangle ACB$ 和 $\triangle A'C'B'$ 中, $\angle C=\angle C'=\text{Rt}\angle$, $AB=A'B'$, $AC=A'C'$.

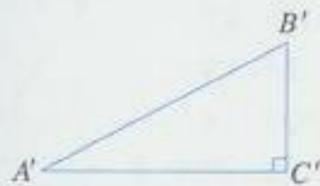


图 2-27

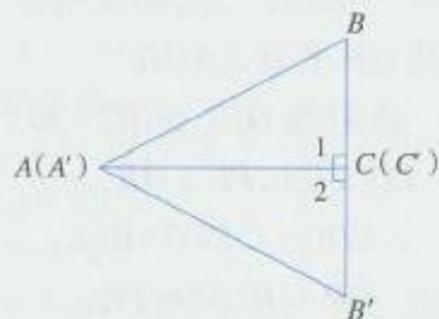


图 2-28

因为 $AC=A'C'$,无论 $\text{Rt}\triangle ACB$ 与 $\text{Rt}\triangle A'C'B'$ 的位置如何,我们总可以通过作旋转、轴对称或平移变换,得到图2-28所示的图形,即 $A'C'$ 与 AC 重合,点 B' 与点 B 分别在 AC 的两侧.

- $\therefore \angle 1=\angle 2=90^\circ$,
- $\therefore B, C, B'$ 在同一条直线上,且 $AC \perp BB'$.
- $\therefore AB=A'B'$,
- $\therefore BC=B'C'$ (等腰三角形三线合一).
- $\therefore AC=A'C'$ (公共边),
- $\therefore \text{Rt}\triangle ACB \cong \text{Rt}\triangle A'CB' \cong \text{Rt}\triangle A'C'B'$ (SSS).

想一想
你还有其他说理的方法吗?

2.7

直角三角形全等的判定



ZHILIAOSANLIAOXINGLIANDENGZEPANDENG

l_1, l_2, l_3 三条道路两两相交,你能找出一,使它到三条道路的距离都相等吗?



合作学习
HEZUOXUEXI

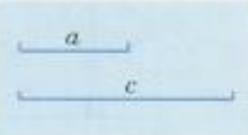
(1) 回顾:判定两个直角三角形全等,我们已经有哪些方法?

(2) 有两条边对应相等的两个三角形全等吗?如果是两个直角三角形呢?你可以通过作图、叠合等方法进行探索.



做一做
ZUOYIZUO

已知线段 a, c (如图),用直尺和圆规作 $\text{Rt}\triangle ABC$,使 $\angle C=\text{Rt}\angle$, $BC=a$, $AB=c$.



例 已知 P 是 $\angle AOB$ 内一点, $PD \perp OA$, $PE \perp OB$, D,E 分别是垂足,且 $PD=PE$ (如图2-29),则点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上.请说明理由.

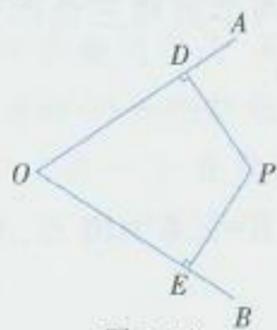


图2-29

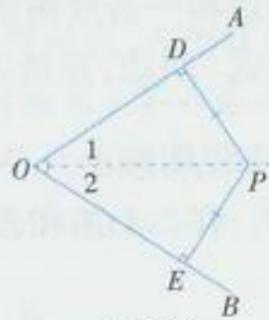


图2-30

分析 如图2-30,要说明点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上,可以转化为说明射线 OP 平分 $\angle AOB$.

解 作射线 OP (如图2-30).

$\because PD \perp OA, PE \perp OB,$

$\therefore \angle PDO = \angle PEO = \text{Rt} \angle.$

又 $\because OP = OP, PD = PE,$

$\therefore \text{Rt} \triangle PDO \cong \text{Rt} \triangle PEO (\text{HL}).$

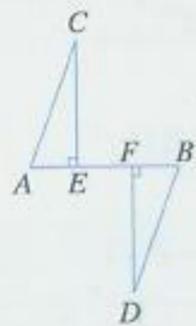
$\therefore \angle 1 = \angle 2$,即点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上.

由此,我们可得到关于角平分线的又一个性质,即

角的内部,到角两边距离相等的点,在这个角的平分线上.

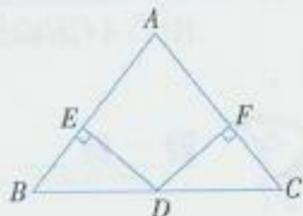


课内练习
KENEILIANXI



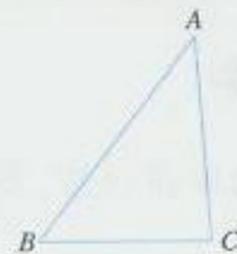
(第2题)

- 如图,在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, $DE \perp AB$ 于点 E , $DF \perp AC$ 于点 F ,且 $DE=DF$,则 $AB=AC$.请说明理由.



(第1题)

- 如图,已知 $CE \perp AB$, $DF \perp AB$, $AC=BD$, $AF=BE$,则 $CE=DF$.请说明理由.



(第3题)



作业题
ZUOYETI

- A组**
- 具有下列条件的 $\text{Rt} \triangle ABC$ 与 $\text{Rt} \triangle A'B'C'$ (其中 $\angle C = \angle C' = \text{Rt} \angle$)是否全等?如果全等,在括号内填写理由;否则,在括号内打“ \times ”:

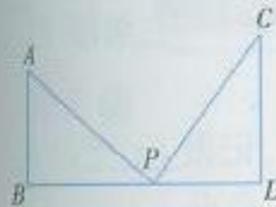
(1) $AC=A'C', \angle A = \angle A'$; ()

(2) $AC=A'C', BC=B'C'$; ()

(3) $\angle A = \angle A', \angle B = \angle B'$; ()

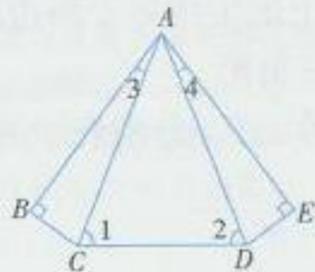
(4) $AB=A'B', \angle B = \angle B'$; ()

(5) $AC=A'C', AB=A'B'$. ()

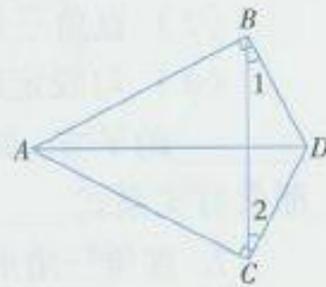


(第2题)

- 如图, $AB \perp BD$ 于点 B , $CD \perp BD$ 于点 D , P 是 BD 上一点,且 $AP=PC$, $AP \perp PC$,则 $\triangle ABP \cong \triangle PDC$.请说明理由.
- 如图, $\angle B = \angle E = \text{Rt} \angle$, $AB=AE$, $\angle 1 = \angle 2$,则 $\angle 3 = \angle 4$.请说明理由.



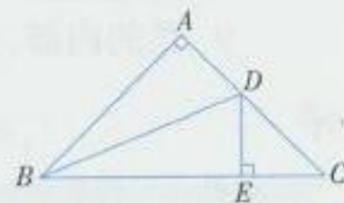
(第3题)



(第4题)

- B组**
- 如图, $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$, $\angle 1 = \angle 2$,则 AD 平分 $\angle BAC$.请说明理由.

- 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle A = 90^\circ$, BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $DE \perp BC$ 于点 E ,则 $AD=CE$.请说明理由.



(第5题)

小结

1. _____的三角形叫做等腰三角形.
2. 等腰三角形是轴对称图形,顶角_____是它的对称轴. 等边三角形有_____条对称轴.
3. 等腰三角形的两个_____相等. 等腰三角形的顶角平分线、_____和_____互相重合.
如果一个三角形有_____角相等,那么这个三角形是等腰三角形.
4. 三边都相等的三角形叫做_____,_____三角形的内角都相等,且等于_____度.
5. 有一个角是直角的三角形叫做_____,记做_____. 两条直角边_____的直角三角形叫做等腰直角三角形.
6. 直角三角形的性质:
 - (1) 在直角三角形中,两个锐角_____.
 - (2) 直角三角形斜边上的中线等于斜边的_____.
 - (3) 勾股定理:直角三角形_____的平方和等于_____的平方. 如果用字母 a, b, c 分别表示两条直角边和斜边,那么有关系式_____.
7. 直角三角形的判定:
 - (1) 有两个角_____的三角形是直角三角形.
 - (2) 如果三角形中两边的_____等于第三边的平方,那么这个三角形是直角三角形.
8. _____和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等.
9. 角的内部,到角两边距离相等的点,在这个角的_____个.

10. 主要方法和技能

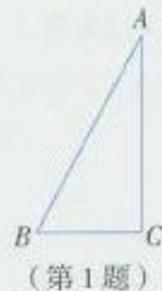
- (1) 运用等腰三角形、直角三角形的性质,进行简单的推理;
- (2) 等腰三角形和直角三角形的判定;
- (3) 判定两个直角三角形全等;
- (4) 有关等腰三角形和直角三角形的尺规作图.

目标与评定

目标 (2.1节, 2.4节)

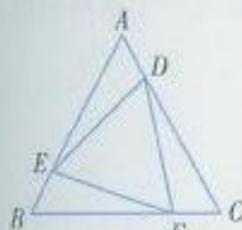
- 了解等腰三角形、等边三角形的有关概念.
- 掌握等腰三角形、等边三角形的对称轴的意义.
- 会根据等腰三角形、等边三角形的有关知识解决简单的图形问题.

1. 如图,以直角边 AC 所在的直线为对称轴,作 $Rt\triangle ABC$ 经轴对称变换后的像. 像与原像所组成的图形是什么图形? 请说明理由.



(第1题)

2. 已知等腰三角形的一边长为 3, 一边长为 6, 则它的周长是()
(A) 12. (B) 12 或 15 都有可能.
(C) 15. (D) 15 或 18 都有可能.



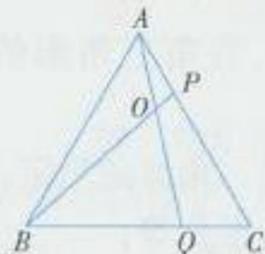
(第3题)

3. 如图, $\triangle ABC$ 是正三角形, D, E, F 分别是各边上的一点, 且 $AD=BE=CF$, 则 $\triangle DEF$ 是正三角形. 请说明理由.
4. 用两块同样大小的含 30° 角的直角三角尺拼出等腰三角形. 你有多少种不同的方法? 分别画出示意图, 并说明理由.

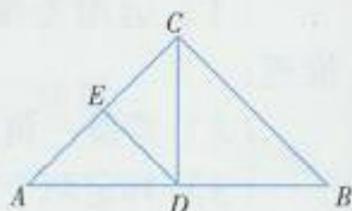
目标 (2.2节, 2.3节, 2.4节)

- 掌握等腰三角形的性质和判定方法.
- 会运用等腰三角形的性质, 判定方法及等边三角形的性质进行简单的推理和计算.

5. 如图,在等边三角形 ABC 的 AC, BC 边上各取一点 P, Q , 使 $AP=CQ, AQ, BP$ 相交于点 O , 求 $\angle BOQ$ 的度数.



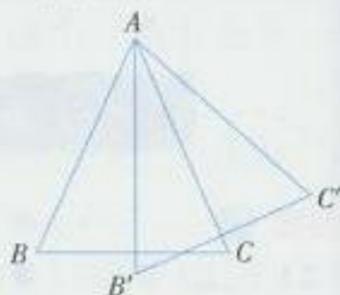
(第5题)



(第6题)

6. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AC=BC, D, E$ 分别在 AB, AC 上, 且 $DE \parallel BC$. 判断 $\triangle ADE$ 是不是等腰三角形, 并说明理由.

7. 如图,把等腰三角形 ABC ($AB=AC$) 绕点 A , 按逆时针方向旋转 $\frac{1}{2} \angle BAC$, 得 $\triangle AB'C'$. 说出 AC 与线段 $B'C'$ 的位置关系, 并说明理由.



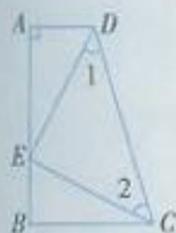
(第7题)

目标 (2.5, 2.6 节)

- 掌握直角三角形的两个锐角互余的关系.
 - 掌握直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质.
 - 体验勾股定理的探索过程. 掌握勾股定理, 并会运用勾股定理解决简单问题.
 - 会判定一个三角形是直角三角形.
8. 若直角三角形的两锐角之差为 12° , 则较大一个锐角的度数是_____.
9. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=\text{Rt}\angle$.
- (1) 若 $AB=5, BC=3$, 则 $AC=$ _____;
- (2) 若 $BC=\sqrt{2}, AC=2$, 则 $AB=$ _____.
10. 用刻度尺和圆规作长度为 $\sqrt{5}$ cm 的一条线段.
11. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=\text{Rt}\angle, AB=5, BC=3$, 求斜边上的高及中线的长.

目标 (2.7 节)

- 掌握两个直角三角形全等的条件 (HL).
- 了解角的内部, 到角两边距离相等的点在这个角的平分线上的性质.



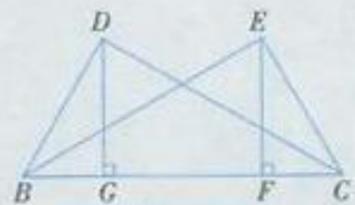
(第12题)

12. 如图, $AD \parallel BC, \angle A=90^\circ, E$ 是 AB 上一点, 且 $AE=BC, \angle 1=\angle 2$.

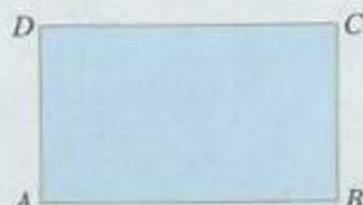
- (1) $\text{Rt}\triangle ADE$ 与 $\text{Rt}\triangle BEC$ 全等吗? 请说明理由;
 (2) $\triangle CED$ 是不是直角三角形? 请说明理由.

13. 如图, $CD=BE, DG \perp BC, EF \perp BC$, 垂足分别为 G, F , 且 $DG=EF$. 判断下列结论是否正确, 并说明理由.

- (1) $BG=CF$; (2) $BD=CE$.



(第13题)

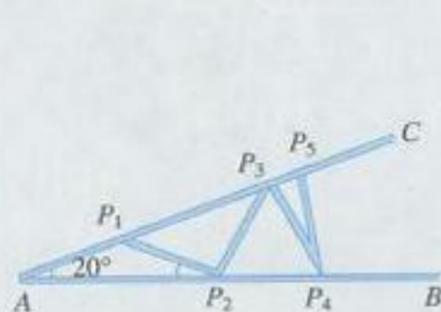


(第14题)

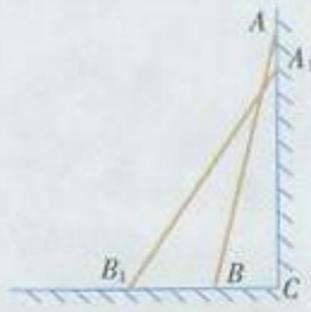
14. 一张长方形纸片如图. 在纸上找一点 P , 使它到 AB, AD 的距离相等, 且到 AB, CD 的距离也相等. 你有什么方法? 请通过画图说明你的方法和理由.

目标

- 初步学会综合运用等腰三角形和直角三角形的知识解决一些简单的实际问题.
15. 如图钢架中, $\angle A=20^\circ$, 焊上等长的钢条来加固钢架. 若 $P_1A=P_1P_2$, 问这样的钢条至多需要多少根?



(第15题)



(第16题)

16. 如图, 一架 2.5 米长的梯子 AB 斜靠在竖直的墙 AC 上, 这时 B 到墙底端 C 的距离为 0.7 米. 如果梯子的顶端沿墙下滑 0.4 米, 那么点 B 将向外移动多少米?



这是中国香港特别行政区维多利亚港的夜景,高楼林立,景象繁华。从建筑群中,你看到哪些几何体的形状?

你知道这些形形色色的包装盒是怎样制作的吗?

本章将学习有关直棱柱的概念及立体图,直棱柱的表面展开图和三视图。通过本章的学习,我们将找到解决上述问题的方法。



CONTENTS

目录

| | |
|-----------------|----|
| 3.1 认识直棱柱 | 54 |
| ● 阅读材料 立体图的一种画法 | 57 |
| 3.2 直棱柱的表面展开图 | 59 |
| 3.3 三视图 | 63 |
| 3.4 由三视图描述几何体 | 67 |
| ● 小结 | 70 |
| ● 目标与评定 | 71 |

认识直棱柱



RENSHI ZHILIEZHU

我国自行研制的“神威”巨型计算机,它的运算速度峰值为3 840亿次/秒,其主要技术指标达到国际先进水平.它的外形和常见的电冰箱、组合柜一样,都是直棱柱.

观察图3-1中的几何图形,它们都是由若干个平面围成的几何体,像这样的几何体叫做**多面体**(polyhedron).多面体上相邻两个面之间的交线叫做多面体的**棱**,几个面的公共顶点叫做多面体的**顶点**(vertex).

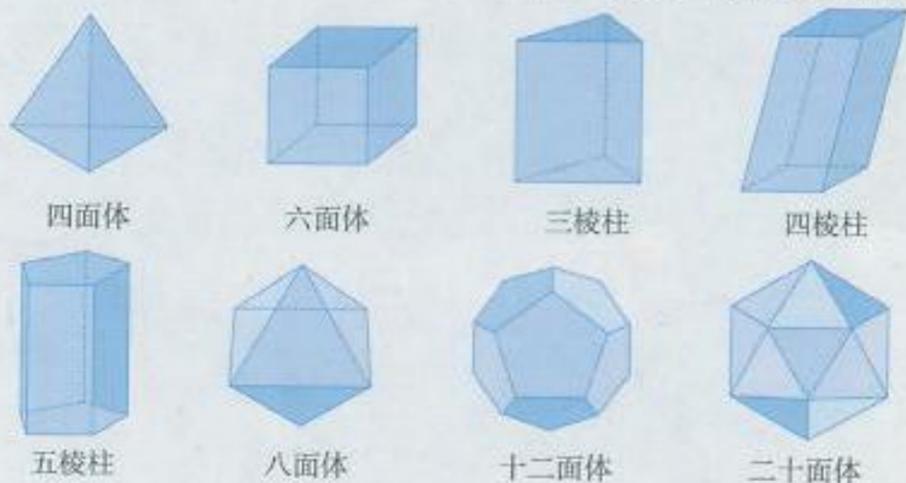


图3-1

棱柱(prism)是特殊的多面体,分为直棱柱和斜棱柱.现阶段我们只讨论直棱柱.直棱柱的上下底面可以是三角形、四边形、五边形……侧面都是长方形(含正方形),根据底面图形的边数,我们就说它是直三棱柱、直四棱柱、直五棱柱……(如图3-2).

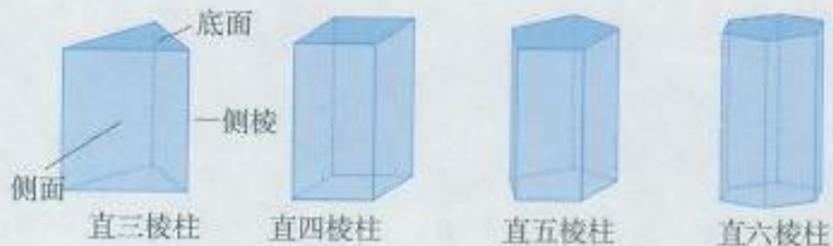


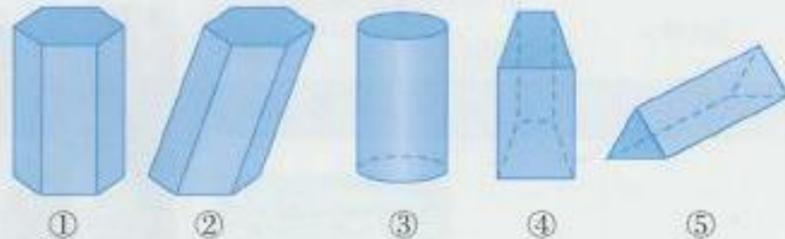
图3-2

长方体和立方体都是直四棱柱.



把一个直棱柱的底面放在水平位置,其侧棱就处于相应的铅垂线位置.想一想,斜棱柱具有这样的特性吗?

1. 下列各几何体中,哪些是直棱柱?如果是,分别是直几棱柱?



(第1题)

2. 直六棱柱有多少条棱?多少条侧棱?多少个侧面?多少个顶点?
3. 直棱柱的相邻两条侧棱之间有什么关系?

一般地,我们可以得到:

直棱柱的相邻两条侧棱互相平行且相等.

例 观察如图3-3所示的首饰盒,它是一个怎样的多面体?这个多面体与直四棱柱有什么关系?

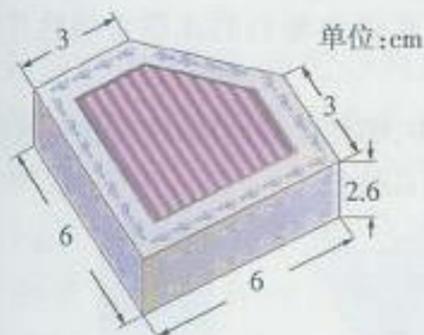


图3-3

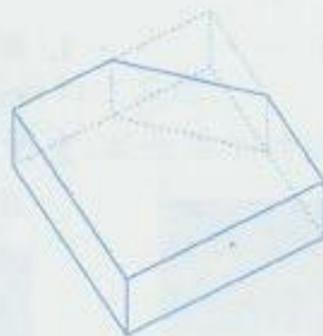


图3-4

解 如图3-4,这个首饰盒是直五棱柱,它可以看做从一个直四棱柱中截去一个直三棱柱得到,其中直四棱柱的底面是边长为6cm的正方形,直三棱柱的底面是腰长为3cm的等腰直角三角形,它们的侧棱长都为2.6cm.



可以把该直五棱柱看做是由两个直四棱柱组成吗?为什么?

1. 下面图片所示的建筑中,哪些体现了直棱柱的立体形状,哪些不是?



马来西亚双塔

中国香港中银大厦

中国上海金茂大厦

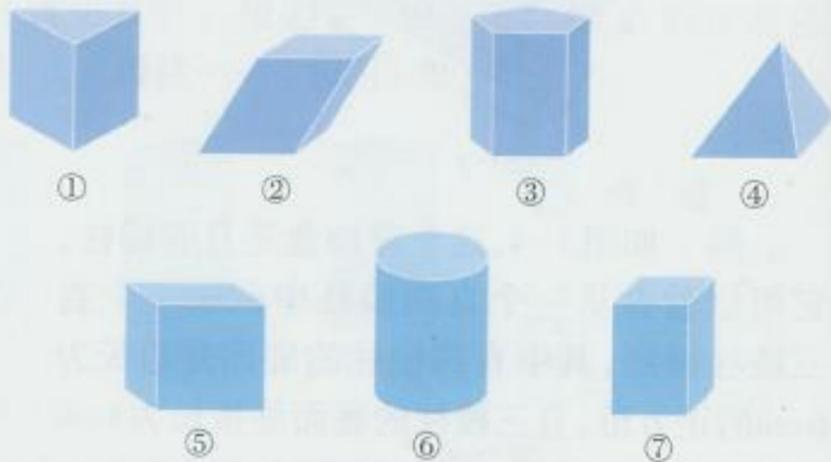
(第1题)

2. 请说明立方体、长方体、直四棱柱、四棱柱和棱柱的相互关系.



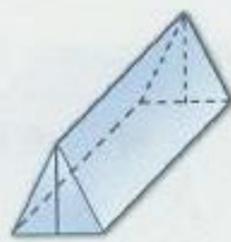
作业题
ZUOYETI

- A组
1. 举两个你在现实生活中看到的体现直棱柱几何形状的例子.
 2. 下面这些几何体中,哪些是多面体?哪些是直棱柱?如果是直棱柱,说出是直几棱柱.



(第2题)

3. 一个种植草莓的大棚形状如图. 它可以看做怎样的棱柱? 这个棱柱的侧面和底面分别是什么图形?

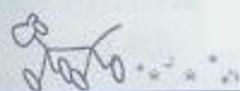


(第3题)

- B组
4. (1) 观察直棱柱的模型或画出示意图,填写下表:

| | 面数 | 棱数 | 顶点数 |
|-------|----|----|-----|
| 直三棱柱 | | | |
| 直四棱柱 | | | |
| 直五棱柱 | | | |
| 直六棱柱 | | | |
| | | | |

- (2) 从上表中,你能发现直棱柱的面数、棱数和顶点数之间有什么规律吗?
5. 一个直棱柱有14个顶点,它是几棱柱? 有多少条棱? 多少个面?



YUEDUCAILIAO 阅读材料



立体图的一种画法

如图3-5,甲、乙两图分别是小明和小慧画的方桌图.

- (1) 哪一幅图中的桌子更形象? 两张图中,桌面画法的区别在哪里?

- (2) 量一量,甲图中表示桌面的平行四边形中,锐角是多少度? 四条边的长度有什么关系?

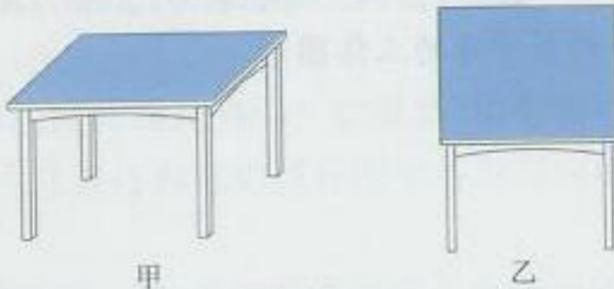


图3-5

在画立体图形时,我们一般把其中水平位置的正方形或长方形画成平行四边形,它的锐角是 45° ,横向边长与实际边长相同,纵向边长画成实际边长的一半.

例 画棱长为2 cm的立方体的立体图形.

分析 画立方体的立体图形时,上、下底面应画成平行四边形,其中的锐角是 45° ,横向边长与实际边长相同,画成2 cm,纵向边长画成实际边长的一半,为1 cm;侧棱长应与实际棱长相同,为2 cm,且互相平行.

画法 如图3-6.

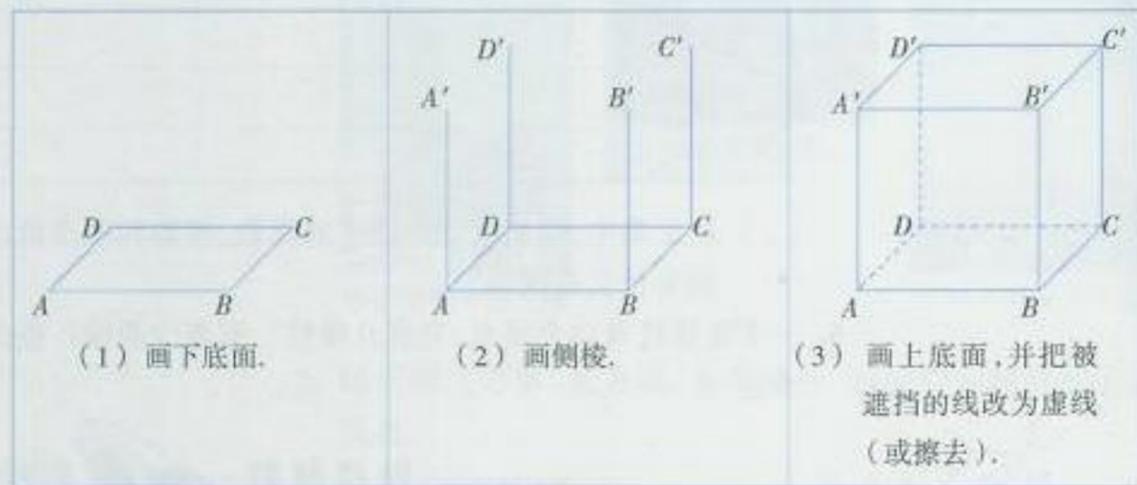


图3-6

请试一试:

- 画一个立方体的立体图形,使立方体的棱长等于已知线段 l (如图3-7).
- 画长、宽、高分别为1.8 cm, 1.4 cm, 0.9 cm的长方体的立体图形.

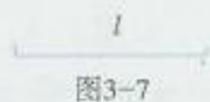
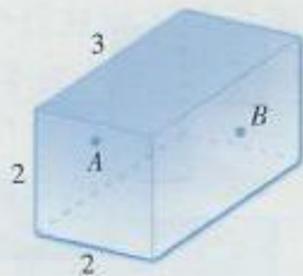


图3-7



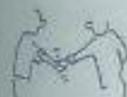
3.2

直棱柱的表面展开图



HELINZHUJIEBACHANGZHONGWANGTU

杜登尼(Dudeney, 1857~1930年)是19世纪英国知名的谜题创作者,下面的问题来源于他创作的“蜘蛛和苍蝇”问题:在一个长、宽、高分别为3米,2米,2米的长方体房间内,一只蜘蛛在一面墙的中间,离天花板0.1米处(点A处),苍蝇在对面墙的中间,离地面0.1米处(点B处).试问,蜘蛛去捉苍蝇需要爬行的最短路径是多少?



合作学习 HEZUOXUEXI

分别将三个立方体纸盒沿某些棱剪开,且使六个面连在一起,然后铺平.你能得到下列图形(图3-8)吗?请试一试.

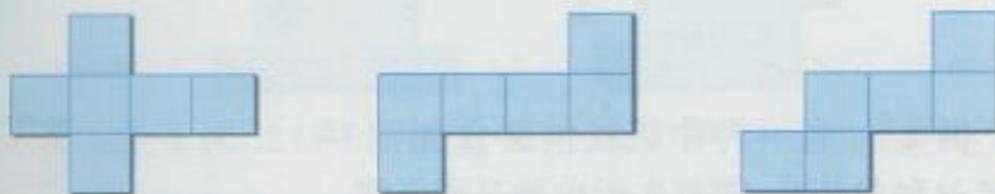


图3-8

像图3-8那样的平面图形称为立方体的表面展开图(net).

例1 图3-9是一个立方体的表面展开图吗?如果是,请分别用1, 2, 3, 4, 5, 6中的同一个数字表示立方体和它的展开图中各对对应的面(只要求给出一种表示法).

分析 可以先用折叠的方法试一试,看它能否折成一个立方体.

解 图3-9是一个立方体的表面展开图,各对应面上的数字表示如图3-10与图3-11.

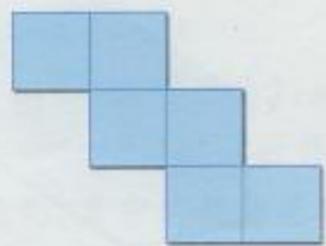


图 3-9

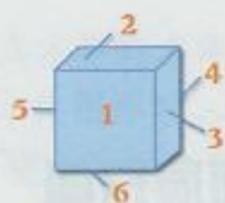


图 3-10

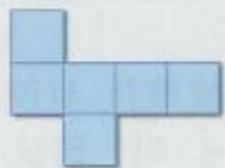


图 3-11

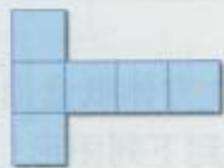


做一做
ZUOYIZUO

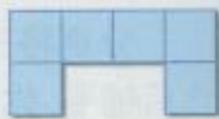
判断下列各图中,哪些图能折叠成一个立方体? 动手试一试.



①



②



③

例 2 有一种牛奶软包装盒如图 3-12. 为了生产这种包装盒,需要先画出展开图纸样.

(1) 如图 3-13 给出三种纸样,它们都正确吗?

(2) 从已知正确的纸样中选出一种,标注上尺寸;

(3) 利用你所选的一种纸样,求出包装盒的侧面积和表面积(侧面积与两个底面积的和).

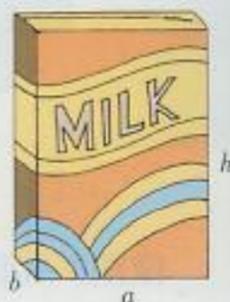
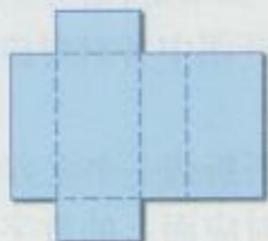
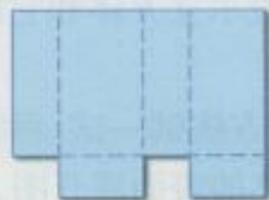


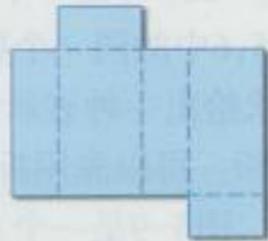
图 3-12



甲



乙



丙

图 3-13

解 (1) 图 3-13 中,因为表示底面的两个长方形不可能在同一侧,所以图乙不正确. 图甲和图丙都正确(请动手试一试,为什么?).

(2) 根据图 3-13,若选图甲,可得表面展开图及尺寸标注如图 3-14 所示.

(3) 由图 3-14 得,包装盒的侧面积为

$$S_{\text{侧}} = (b+a+b+a)h$$

$$= 2ah + 2bh;$$

$$S_{\text{表}} = S_{\text{侧}} + 2S_{\text{底}}$$

$$= 2ah + 2bh + 2ab.$$

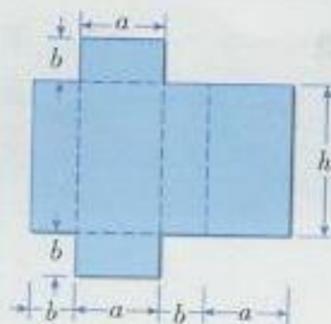
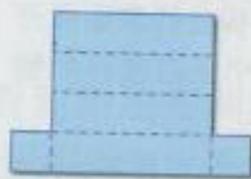


图 3-14

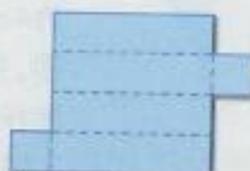


课内练习
KENEILIANXI

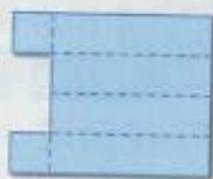
1. 下面哪些图形经过折叠可以围成一个棱柱?



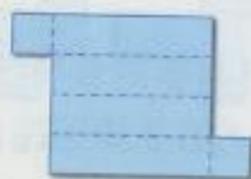
①



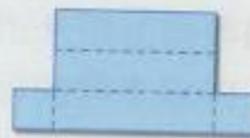
②



③



④



⑤

(第 1 题)

2. 画出如图所示的底面为正三角形的直棱柱的表面展开图.



(第 2 题)



以 3~4 人为一组,讨论并探究怎样利用表面展开图和两点间线段最短的原理解决节前图中的著名谜题.

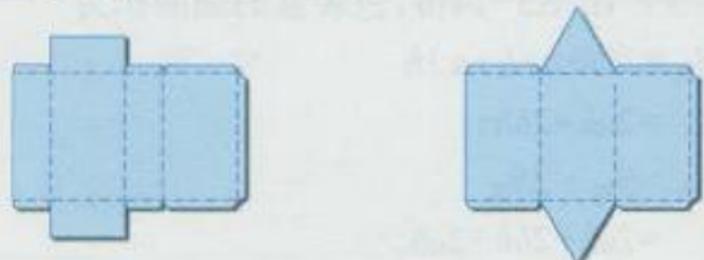




作业题

ZUOYETI

- A 组**
1. 用较厚的纸按照图示画好剪下,再把它折起来粘好,做成直棱柱的模型(选做其中一个).



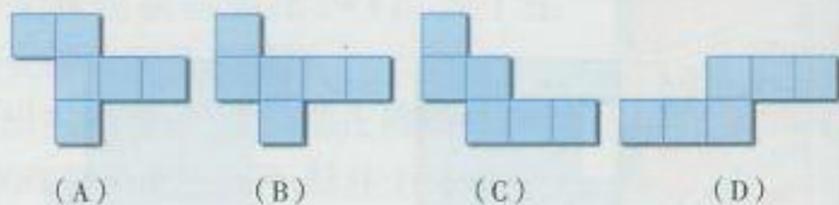
(第1题)

2. 如图是哪一种几何体的表面展开图?先想一想,再折一折.
3. 画出底面边长为2 cm,侧棱长为4 cm的正四棱柱的表面展开图,并计算这个正四棱柱的侧面积和表面积.

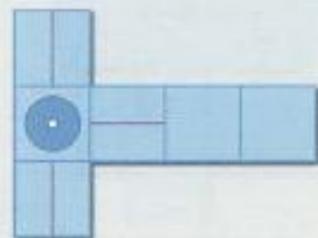


(第2题)

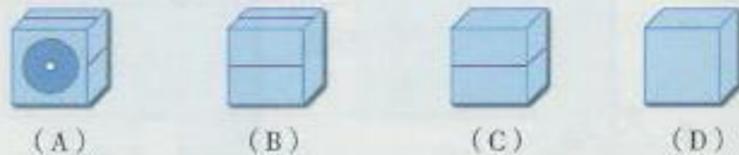
4. 下列各图中,经过折叠不能围成一个立方体的是()



- B 组**
5. 一个立方体的表面展开图如图所示,将其折叠为立方体后的立体图形是()



(第5题)



3.3

三视图



SWFHU

这是飞机模型(右下)及其从不同方向观察到的视图.

我们从不同的方向观察同一物体时,可能看到不同的图形(如节前图).为了能完整确切地表达物体的形状和大小,必须从多方面观察物体.在几何中,我们通常选择从正面、上面、左面三个方向观察物体,如图3-15.

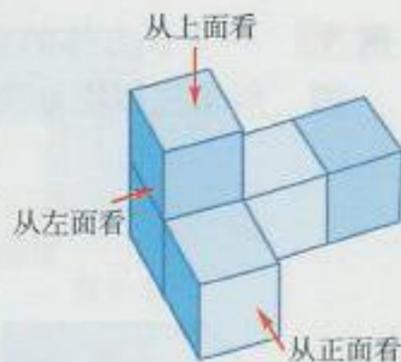


图3-15

我们把从正面看到的图形叫做**主视图**,从左面看到的图形叫做**左视图**,从上面看到的图形叫做**俯视图**.主视图、左视图、俯视图合称**三视图**.你能画出图3-15中几何体的主视图、左视图和俯视图吗?

在生活和生产实践中,我们经常需要运用三视图来描述物体的形状和大小.如图3-17所示的图形就是图3-16所示的热水瓶的三视图.

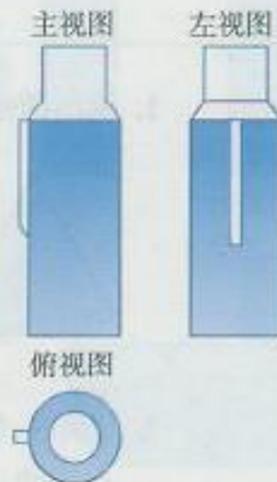


图3-16

图3-17

从图3-16、图3-17可以看出,在三视图中,主视图和俯视图共同反映了物体左右方向的尺寸,通常称之为“长对正”;主视图和左视图共同反映了物体上下方向的尺寸,通常称之为“高平齐”;俯视图和左视图共同反映了物体前后方向的尺寸,通常称之为“宽相等”。

“长对正、高平齐、宽相等”是画三视图必须遵循的法则.在画三视图时,我们一般先画主视图,再把左视图画在主视图的右边,把俯视图画在主视图的下面.

例 1 一个长方体的立体图如图3-18所示,请画出它的三视图.

解 所求三视图如图3-19.

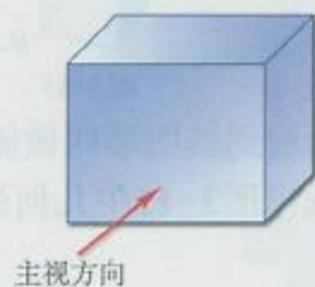


图 3-18

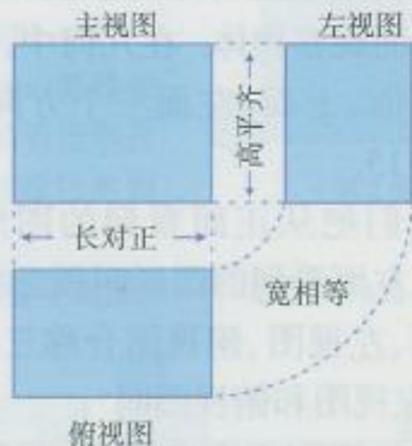


图 3-19



做一做
ZUOYIZUO

1. 说出圆锥、球的三视图各是什么图形.



(第1题)



(第2题)

2. 已知一个直三棱柱的底面是等腰直角三角形,如图.请画出它的三视图.

例 2 由5个相同的小立方块搭成的几何体如图3-20所示,请画出它的三视图.

解 所求三视图如图3-21所示.

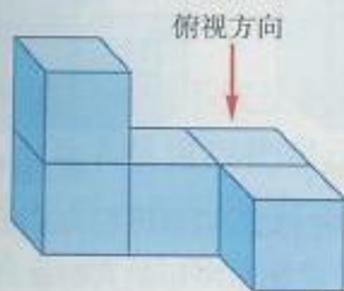


图 3-20

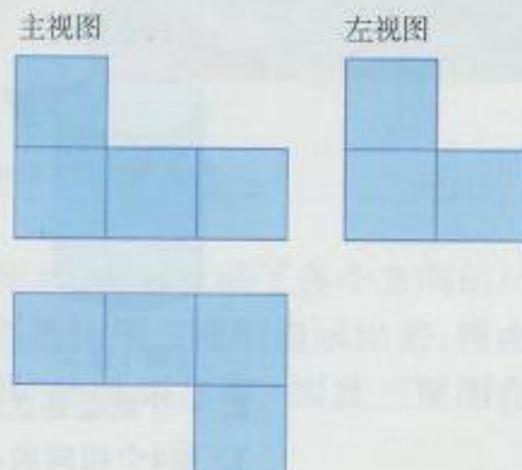
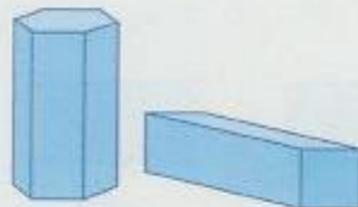


图 3-21

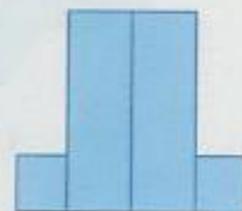


课内练习
KENEILIANXI

1. 一个直六棱柱和长方体如图所示放置.你能说出下面(a),(b),(c)三个视图分别从哪个方向看到的吗?



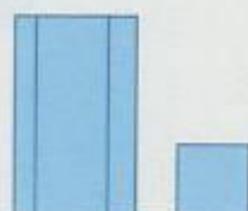
(第1题)



(a)

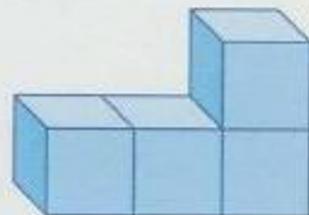


(b)



(c)

2. 用4个小立方块搭成的几何体如图.请画出它的三视图.



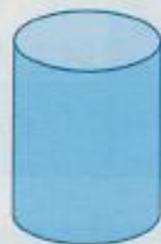
(第2题)



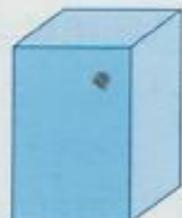
作业题

ZUOYETI

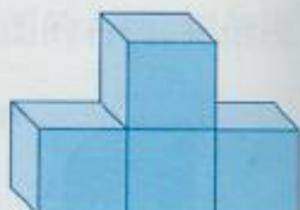
- A 组** 1. 一个圆柱如图,从正面看到的是什么图形?从上面看到的是什么图形?从左面看到的是什么图形?



(第1题)



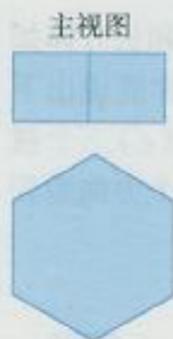
(第2题)



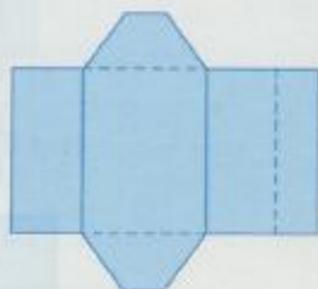
(第3题)

2. 一个底面是正方形的直棱柱如图.请画出它的三视图.
3. 由4个相同的小立方块搭成如图所示的几何体.请画出它的三视图.

- B 组** 4. 一个直六棱柱的主视图和俯视图如图所示.请补画它的左视图.



(第4题)



(第5题)

- C 组** 5. 一个直四棱柱的表面展开图如图所示.请画出它的三视图.



3·4

由三视图描述几何体

YULIAOHEJITUMIAOSHULIJIETI

根据如图右边的椅子的视图,工人就能制造出符合设计要求的椅子.



由于三视图不仅反映了物体的形状,而且反映了各个方向的尺寸大小,设计人员可以把自己构思的创造物用三视图表示出来,再由工人制造出符合各种要求的机器、工具、生活用品等.因此三视图在许多行业有着广泛的应用.



合作学习

HEZUOXUEXI

你能从下面(图3-22)所给的三视图中推断出它们分别表示什么几何体吗?

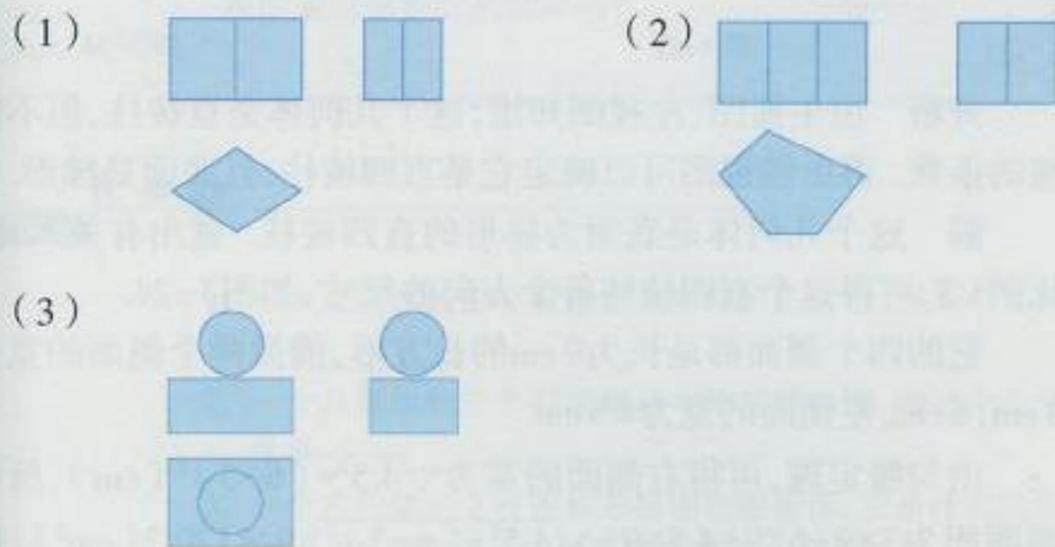
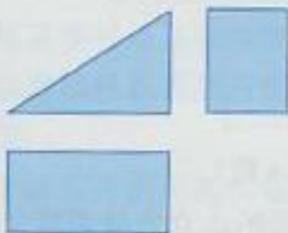


图3-22

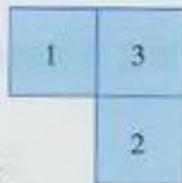




1. 某物体的三视图如图所示, 请说出它的形状.



(第1题)



(第2题)

2. 由几个相同的小立方块搭成的几何体的俯视图如图所示, 方格中的数字表示在该位置的小立方块的个数. 请画出这个几何体的三视图.

用6个相同的小立方块搭一个几何体, 它的俯视图如图3-25所示. 则一共有几种不同形状的搭法(你可以用实物模型动手试一试)? 你能用三视图表示你探究的结果吗?

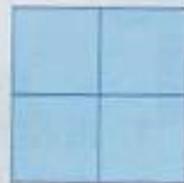


图3-25



作业题

ZUOYETI

- A组**
1. 一个几何体的三个视图都是全等的正方形, 则这个几何体是_____.
 2. 一个几何体的三个视图都是半径相等的圆, 则这个几何体是_____.
 3. 一个几何体的主视图和左视图如图所示, 它是什么几何体? 请补画这个几何体的俯视图.



(第3题)

由三视图描述几何体(或实物原型), 一般先根据各视图想像从各个方向看到的几何体形状, 然后综合起来确定几何体(或实物原型)的形状, 再根据三个视图“长对正、高平齐、宽相等”的关系, 确定轮廓线的位置, 以及各个方向的尺寸.

例 已知一个几何体的三视图如图3-23所示, 描述该几何体的形状, 量出三视图的有关尺寸, 并根据已知的比例求出它的侧面积(精确到 0.1 cm^2).

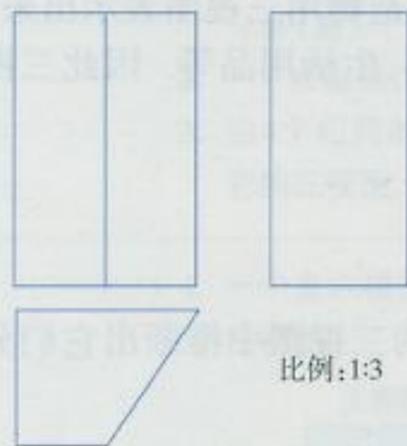


图3-23

比例:1:3

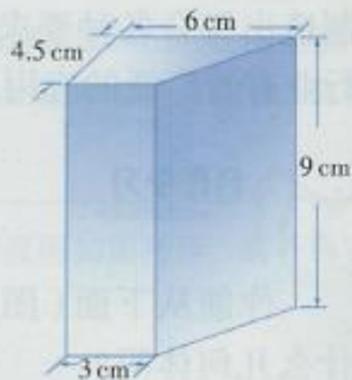


图3-24

分析 由主视图、左视图知道, 这个几何体是直棱柱, 但不能确定棱的条数. 再由俯视图可以确定它是直四棱柱, 且底面是梯形.

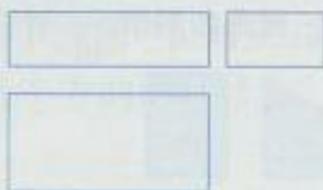
解 这个几何体是底面为梯形的直四棱柱. 量出有关尺寸, 根据比例1:3, 可得这个直四棱柱各个方向的尺寸, 如图3-24.

它的四个侧面都是长为9 cm的长方形, 前后两个侧面的宽分别为3 cm, 6 cm, 左侧面的宽为4.5 cm.

由勾股定理, 可得右侧面的宽为 $\sqrt{4.5^2 + (6-3)^2}$ (cm), 所以它的侧面积为 $3 \times 9 + 6 \times 9 + 4.5 \times 9 + \sqrt{4.5^2 + (6-3)^2} \times 9 \approx 170.2$ (cm^2), 即这个几何体的侧面积为 170.2 cm^2 .



- B 组** 4. 一个几何体的三视图如图所示. 请说出它的形状, 并画出它的表面展开图.



(第4题)

| | |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 1 |

(第5题)

5. 由几个相同的小立方块搭成的几何体的俯视图如图所示, 方格内的数字表示该位置小立方块的个数. 请画出这个几何体的主视图和左视图.

小结

- 由若干个_____围成的几何体叫做多面体.
- 直棱柱的侧面都是_____. 直棱柱的相邻两条侧棱互相_____.
- 观察一个物体时, 把从正面看到的图形叫做_____, 从_____看到的图形叫做俯视图, 从左面看到的图形叫做_____. 把主视图、俯视图、左视图合起来, 就叫做_____.
- 主要方法和技能
 - (1) 认识直棱柱;
 - (2) 画直棱柱的表面展开图;
 - (3) 画简单几何体的三视图. 画三视图必须长_____, 高_____, 宽_____;
 - (4) 根据三视图描述几何体.

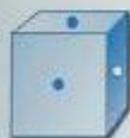
目标与评定

目标 4

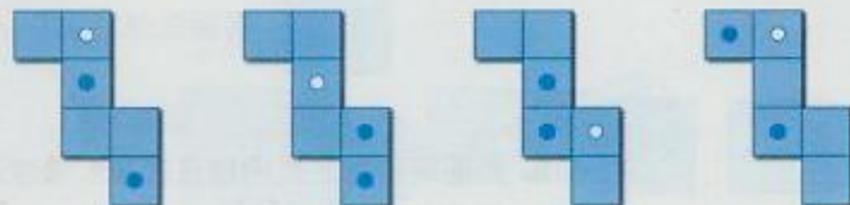
(3.1节, 3.2节)

- 了解直棱柱及其有关概念.
- 了解直棱柱表面展开图的概念, 会画简单直棱柱的表面展开图.
- 能根据展开图判断和制作立体模型.

1. 一个直五棱柱的侧面个数是_____, 顶点个数是_____, 棱的条数是_____.
2. 一个底面为正方形的直棱柱的侧面展开图是一个边长为4的正方形, 则它的表面积为_____, 体积为_____.
3. 将三个面上做有标记的立方体盒子展开, 以下各示意图中有可能是它的展开图的是()

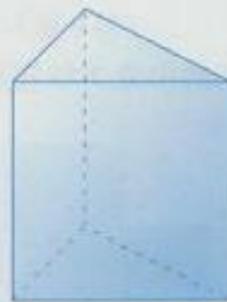


(第3题)

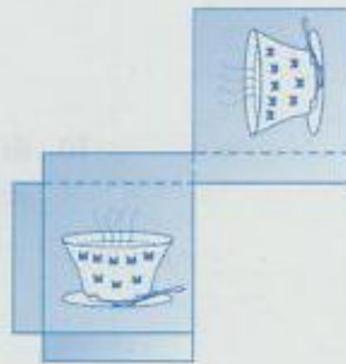


(A) (B) (C) (D)

4. 一个直棱柱的立体图如图所示. 请画出它的表面展开图(只需画出一种).
5. 一个包装盒的展开图如图. 请描述它的形状. 你能用硬纸做出它的模型吗?



(第4题)

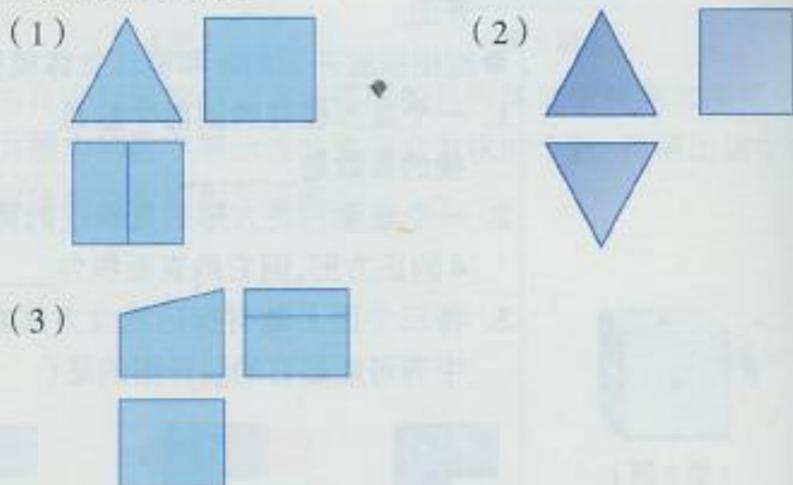


(第5题)

目标 2
(3.3节, 3.4节)

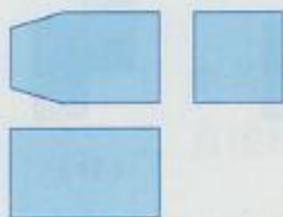
- 了解主视图、俯视图、左视图的概念.
- 会画直棱柱等简单几何体的三视图. 会根据三视图描述简单几何体.

6. 画长5 cm, 宽4 cm, 高1 cm的长方体的三视图.
7. 下列三视图所表示的几何体存在吗? 如果存在, 请说出相应几何体的名称.



(第7题)

8. 如图所示的三视图错在哪里? 请改正, 并说出改正后的三视图所表示的几何体的名称.
9. 一个铁皮盒如图甲, 它的主视图和俯视图如图乙所示. 请补画它的左视图(不包括盒盖).



(第8题)

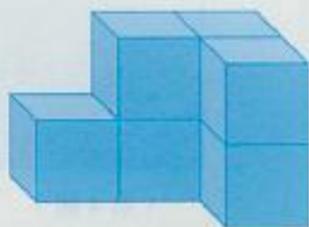


甲

乙

(第9题)

10. 由若干个小立方块搭成的几何体如图. 请画出它的三视图.

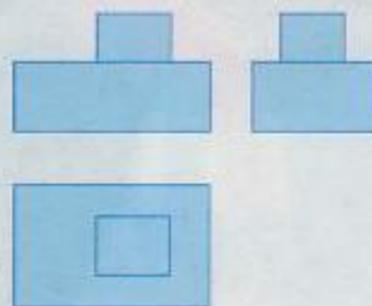


(第10题)

目标 3

- 会初步运用有关立体图形的展开图和三视图的知识解决简单的实际问题.

11. 已知一个模型的三视图如图所示, 与实际尺寸的比例为1:50.



- (1) 请描述这个模型的形状;

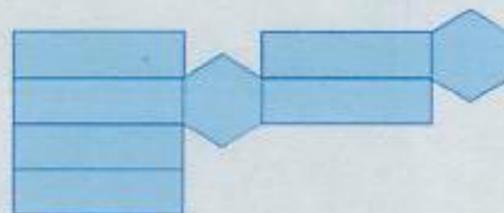
- (2) 从三视图中量出尺寸, 并换算成实际尺寸;

- (3) 制作这个模型的木料

(第11题)

密度为 360 kg/m^3 , 则这个模型的质量是多少kg? 如果油漆这个模型, 每千克油漆可以漆 4 m^2 , 需要油漆多少kg?

12. 一个包装盒的展开图如图所示. 请说出它的形状, 并画出它的三视图.



(第12题)

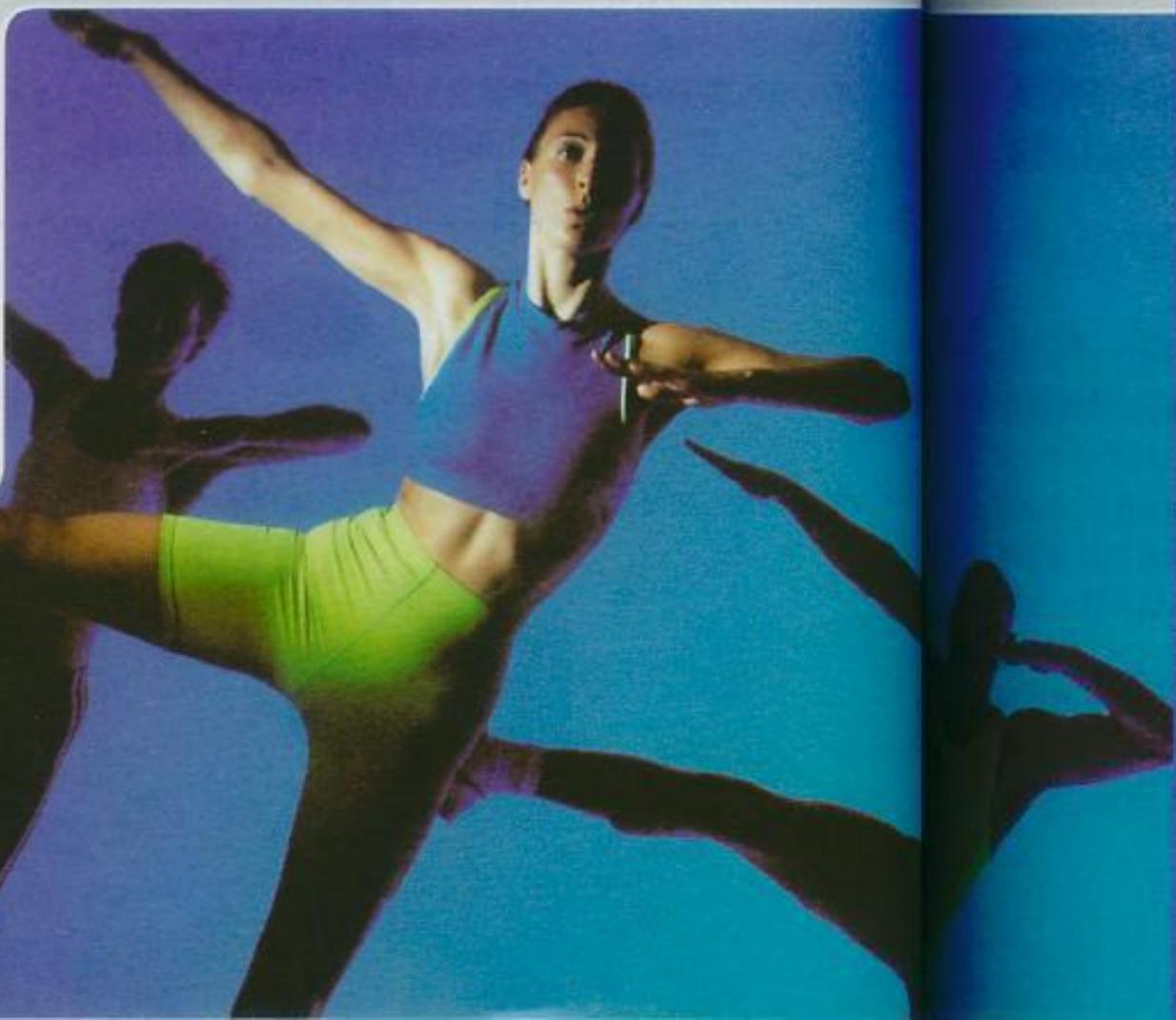


在许多大型的文艺比赛中,统计评委的评分时,为什么要去掉一个最高分和一个最低分?

| 评委 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----|----|---------------|----|----|---------------|----|----|----|
| 得分 | 85 | 78 | 88 | 83 | 92 | 88 | 87 | 84 |

团体操比赛中,衡量一个队的水平涉及服装、动作准确、动作整齐等多个方面,并且各个方面对比赛成绩的影响大小不一,那么如何来评定一个团队的成绩呢?

本章将学习平均数、中位数和众数、方差和标准差等内容.通过本章的学习,我们将找到解决上述问题的方法.



样本与数据分析初步

YANGBENYUSHUJUFENXICHUBU

CONTENTS

目录

| | |
|-------------------------|----|
| 4.1 抽样 | 74 |
| 4.2 平均数 | 77 |
| 4.3 中位数和众数 | 81 |
| ● 阅读材料 利用计算机求平均数、中位数和众数 | 85 |
| 4.4 方差和标准差 | 87 |
| 4.5 统计量的选择与应用 | 91 |
| ● 小结 | 95 |
| ● 目标与评定 | 96 |

4.1

抽 样



CHUYANG

据报道,地处山西吕梁地区的交口县林草覆盖率达56.3%,林木茂密,空气清新,最近几年每逢夏季,在新庄村前后约50千米范围内会出现百里蝶群的奇观。

要了解全国初中生的视力情况,有人设计了下面三种调查方法:

- (1) 对全国所有的初中生进行视力测试;
- (2) 对某一所著名中学的初中生进行视力测试;
- (3) 在全国按东、西、南、北、中分片,每个区域各抽3所中学,对这15所中学的全部初中生进行视力测试。

你认为采用哪一种调查方法比较合适?

人们在研究某个自然现象或社会现象时,往往会遇到不方便、不可能或不必要对所有的对象作调查的情况,于是从中抽取一部分对象作调查分析,这就是**抽样**(sampling)。

做一做

1. 某机构要调查一手机生产厂家的手机质量,是否需要把该厂生产的所有手机进行检测?
2. 要了解初中生有多少学生知道父母的生日,有没有必要对你校初中各年级所有同学进行调查?有没有必要对全国初中学生进行调查?如需要用抽样的方法,请设计一个抽样方案。
3. 要估计山西交口县新庄村“百里蝶群”中大约有多少只蝴蝶,你会采取什么方法?
(请与你的同伴交流)

例 电视台需要在某市调查某节目的收视率,每个看电视的人都要被问到吗?对一所中学学生的调查结果能否作为该节目的收视率?你认为对不同社区、年龄层次、文化背景的人所做调查的结果会一样吗?

解 电视台在调查时不可能问到每个看电视的人.对一所中学学生的调查结果不能作为该节目的收视率,因为只有中学生,缺乏代表性.不同社区、年龄层次、文化背景的人所做调查的结果不一样,因为他们的兴趣、爱好等方面情况相去甚远.

在统计中,我们把所要考察的对象的全体叫做**总体**(population),把组成总体的每一个考察对象叫做**个体**(element).例如,调查某县农民家庭情况时,该县的全体农户是总体,每一农户就是个体.从总体中取出的一部分个体的集体叫做这个总体的一个**样本**(sample),样本中个体的数目叫做**样本的容量**.在统计中,我们有时也把要考察的全体对象的数据整体叫做总体,把从中取出的一部分个体的数据集体叫做样本.

我们常常根据样本得到的结果来推测总体的结果.不同的抽样可能得到不同的结果,为了使结果更具准确性,在抽样时,样本的容量要合理,样本的个体要有代表性.



合作学习
HEZUOXUEXI

某地区今年约有10 000名学生参加初中毕业升学考试.为了了解数学考试成绩,从中抽取1 000份学生的答卷来统计合格率、优秀率和平均分,问应怎样抽取这1 000份答卷,使所了解的数据具有代表性?

已知有关信息如下:

- (1) 抽样在卷头拆封前进行(即看不见考生的姓名、所在学校、准考证号码等);
- (2) 每个考场有25名考生,每个考场考生的答卷装订成一叠,包装袋上写有考场编号;

(3) 参加考试的同一所学校的各个考场连续编号.

建议先以小组为单位制订抽样方案,然后各组由一名代表向全班介绍本组的抽样方案,并进行评议总结.



课内练习

KENEILIANXI

1. 要了解市民对自来水水质的满意程度,是否需要问遍每个市民? 对一个居民区住户的调查结果是否能代表全市市民的意见? 你认为应作怎样的抽样调查?
2. 为了了解学生对学校伙食的满意程度,小红访问了50名女生;小聪访问了50名男生;小明访问了24名男生和24名女生,其中七年级、八年级和九年级各个年级的男生和女生各8名. 你认为小红、小聪、小明三人的不同抽样方法,哪一种最好? 为什么?



作业题

ZUOYETI

- A组**
1. 请指出下列调查哪些应作普查^①,哪些应作抽样调查:
 - (1) 日光灯管厂要检测一批灯管的使用寿命;
 - (2) 了解居民对废电池的处理情况;
 - (3) 了解现代大学生的主要娱乐方式;
 - (4) 防治某突发性传染病期间,某学校对学生测量体温.
 2. 要对大批量生产的商品进行检验,你认为下列做法哪种比较合理,为什么?
 - ① 把所有商品逐件进行检验;
 - ② 从中抽取1件进行检验;
 - ③ 从中挑选几件进行检验;
 - ④ 从中按抽样规则抽取一定数量的商品进行检验.
- B组**
3. 某部门要对某厂生产的一批袜子进行质量检查. 这批袜子共有100箱,每箱有10打,一打为12双. 设定抽样的样本容

① 普查是指对所有考察对象逐一调查.

量为100双,请你为该部门制订一个抽样方案.

4. 为了了解某路口每天在学校放学时段的车流量,准备抽取10天作为一个样本来调查. 下面有几个调查方案,请你分析哪一个更合理. 你还有什么好的建议?
 - ① 连续10天;
 - ② 选择5个晴天,5个雨天;
 - ③ 隔一天观察一次;
 - ④ 在4月,10月各选一周,每周5天.

- C组**
5. 某厂家在某城市3个经销该厂产品的大商场进行调查,发现该厂产品的销售量占这3个大商场同类产品销售量的40%,于是该厂声称,他们的产品占国内同类产品销售量的40%. 你认为这种宣传可信吗? 为什么?

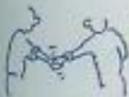


4.2

平均数

PIJUNSU

水果在收获前,果农常会先估计果园里果树的产量. 你认为应该怎样估计呢?



合作学习

HEZUOXUEXI

某果农种植的100棵苹果树即将收获. 果品公司在付给果农定金前,需要对这些苹果树的苹果总产量进行估计.

- (1) 果农任意摘下20个苹果,称得这20个苹果的总质量为4千克. 这20个苹果的平均质量是多少千克?
- (2) 果农从100棵苹果树中任意选出10棵,数出这10棵苹果树上的苹果数,得到以下数据(单位:个):



154, 150, 155, 155, 159, 150, 152, 155, 153, 157.

你能估计出平均每棵树的苹果个数吗?

(3) 根据上述两个问题,你能估计出这100棵苹果树的苹果总产量吗?

一般地,如果有 n 个数 x_1, x_2, \dots, x_n , 我们把 $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n)$ 叫做这 n 个数的**算术平均数**(arithmetic mean), 简称**平均数**(mean), 记做 \bar{x} (读做“ x 拔”).

在实践中,常用样本的平均数来估计总体的平均数. 例如,在上面的例子中,用20个苹果的平均质量0.2千克来估计100棵苹果树上苹果的平均质量,用10棵树的平均苹果个数154个来估计100棵树的平均苹果个数.



做一做

ZUOYIZUO

某中学足球队20名队员的身高如下(单位:cm):

170, 167, 171, 168, 160, 172, 168, 162, 172, 169,

164, 174, 169, 165, 175, 170, 165, 167, 170, 172.

请计算这20名队员的平均身高.

例 1 统计一名射击运动员在某次训练中 15 次射击的中靶环数, 获得如下数据:

6, 7, 8, 7, 7, 8, 10, 9, 8, 8, 9, 9, 8, 10, 9.

求这次训练中该运动员射击的平均成绩.

解 成绩为 6 环的数据有 1 个, 7 环的数据有 3 个, 8 环的数据有 5 个, 9 环的数据有 4 个, 10 环的数据有 2 个, 所以该运动员各次射击的平均成绩为

$$\bar{x} = \frac{6 \times 1 + 7 \times 3 + 8 \times 5 + 9 \times 4 + 10 \times 2}{1 + 3 + 5 + 4 + 2} = \frac{123}{15} = 8.2 \text{ (环)}.$$

答:这次训练中该运动员射击的平均成绩为8.2环.

上例中, $\bar{x} = \frac{6 \times 1 + 7 \times 3 + 8 \times 5 + 9 \times 4 + 10 \times 2}{1 + 3 + 5 + 4 + 2}$ 这种形式的平均数叫做**加权**

平均数(weighted mean), 其中 1, 3, 5, 4, 2 表示各相同数据的个数, 称为**权**(weight). “权”越大, 对平均数的影响就越大.

例 2 某校在一次广播操比赛中, 801 班, 802 班, 803 班的各项得分如下:

表4-1

| | 服装统一 | 动作整齐 | 动作准确 |
|-------|------|------|------|
| 801 班 | 80 | 84 | 87 |
| 802 班 | 98 | 78 | 80 |
| 803 班 | 90 | 82 | 83 |

(1) 如果根据三项得分的平均数从高到低确定名次, 那么三个班的排名顺序怎样?

(2) 如果学校认为这三个项目的重要程度有所不同, 而给予这三个项目的权的比为 15:35:50. 以加权平均数来确定名次, 那么三个班的排名顺序又怎样?

解 (1) 三个班得分的平均数分别为:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{3}(80+84+87) \approx 83.7 \text{ (分)};$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{3}(98+78+80) \approx 85.3 \text{ (分)};$$

$$\bar{x}_3 = \frac{1}{3}(90+82+83) = 85 \text{ (分)}.$$

答:三个班的排名顺序为802班, 803班, 801班.

(2) 三个班得分的加权平均数分别为:

$$\bar{x}_1' = \frac{80 \times 15 + 84 \times 35 + 87 \times 50}{15 + 35 + 50} = 84.9 \text{ (分)};$$

$$\bar{x}_2' = \frac{98 \times 15 + 78 \times 35 + 80 \times 50}{15 + 35 + 50} = 82 \text{ (分)};$$

$$\bar{x}_3 = \frac{90 \times 15 + 82 \times 35 + 83 \times 50}{15 + 35 + 50} = 83.7 \text{ (分)}.$$

答:三个班的排名顺序为801班,803班,802班.



课内练习

KENEILIANXI

1. 某公司6名员工在一次义务募捐中的捐款额分别记录如下(单位:元):
50, 30, 50, 60, 50, 30.
这6名员工的平均捐款额是多少?你能否用两种不同的方法计算结果?
2. 某校规定学生的数学期末总评成绩由三部分组成,平时参与数学活动情况占25%,作业完成情况占35%,期末考试成绩占40%.小明平时参与数学活动、作业完成情况和期末考试得分依次为84分、92分、88分,则小明的数学期末总评成绩是多少?



作业题

ZUOYETI

- A组**
1. 为了解803班同学的血色素平均水平,任意抽取了8位同学的血样进行血色素检测,测得结果如下(单位:g/mL):
138, 125, 106, 110, 147, 124, 136, 122.
这8位同学血色素的平均数为_____g/mL.
 2. 某校5个小组参加植树活动,平均每组植树10株.已知第一、二、三、五组分别植树9株、12株、9株、8株,那么第四小组植树()
(A) 12株. (B) 11株. (C) 10株. (D) 9株.
 3. 如果 x_1 与 x_2 的平均数是6,那么 x_1+1 与 x_2+3 的平均数是()
(A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 8.
 4. 一次中学生田径运动会上,男子跳高项目的成绩统计如下:

| | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|
| 成绩(m) | 1.50 | 1.55 | 1.60 | 1.65 | 1.70 |
| 人数 | 2 | 8 | 6 | 4 | 1 |

这次男子跳高项目的平均成绩是多少(结果保留3个有效数字)?

- B组**
5. 某地共有62家供应快餐的饭店.环保部门为了了解一天共用了多少个一次性快餐饭盒,对其中8家饭店一天使用一次性快餐饭盒的个数作了调查,获得以下数据(单位:个):
125, 115, 140, 270, 110, 120, 100, 140.
(1) 这8家饭店平均每家一天使用一次性快餐饭盒多少个?
(2) 估计这62家饭店一天共使用一次性快餐饭盒的个数.
 6. 某商场用加权平均数来确定什锦糖的单价.由单价为15元/千克的甲种糖果30千克,单价为12元/千克的乙种糖果50千克,单价为10元/千克的丙种糖果20千克混合成的什锦糖果的单价应定为多少元?



4.3

中位数和众数



ZHONGWEISHUHEZHONGSHU

选拔运动会彩旗队队员的条件之一是全队队员的身高比较均衡.

学校要召开一次运动会,决定从八年级4个班中抽调40名男生组成一个彩旗队.现从八年级一班的体检表中任意抽出10名男生的身高如下(单位:米):

1.59, 1.60, 1.58, 1.64, 1.64, 1.56, 1.68, 1.65, 1.64, 1.60.

根据以上信息,请你确定参加彩旗队学生的适当身高,并说明理由.

一般地,一组数据中出现次数最多的那个数据叫做这组数据的**众数**(mode).一组数据按大小顺序排列,位于最中间的一个数据(当有偶数个数据时,为最中间两个数据的平均数)叫做这组数据的**中位数**(median).例如,上述数据的众数是1.64,中位数是

$$\frac{1.60+1.64}{2}=1.62.$$



做一做

ZUOYIZUO

求下面数据的平均数、中位数和众数.

8, 10, 10, 13, 13, 13, 14, 15, 17, 18.

例 某工程咨询公司技术部门员工一月份的工资报表如下(单位:元):

表4-2

| 技术部门员工 | 总工程师 | 工程师 | 技术员A | 技术员B | 技术员C | 技术员D | 技术员E | 技术员F | 技术员G | 见习技术员H |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--------|
| 工资 | 5000 | 4000 | 1800 | 1700 | 1500 | 1200 | 1200 | 1200 | 1000 | 400 |

- 求该公司技术部门员工一月份工资的平均数、中位数和众数;
- 作为一般技术人员,若考虑应聘该公司技术部门工作,该如何看待工资情况?

解 (1) $\bar{x} = \frac{1}{10}(5\ 000+4\ 000+1\ 800+1\ 700+1\ 500+1\ 200 \times 3+1\ 000+400)$
 $=1\ 900$ (元).

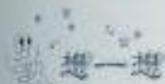
将员工的工资数按从大到小的顺序排列后,中间两个数是1 500, 1 200,所以中位数是 $\frac{1}{2}(1\ 500+1\ 200)$,即工资的中位数是1 350元.

员工的工资数中,出现次数最多的是1 200元,所以众数是1 200元.

(2) 虽然该技术部门技术人员一月份的月平均工资是1 900元,

但它不能代表普通员工该月收入的一般水平.如果除去总工程师、工程师的工资,那么其余8人的平均工资为1 250元,比较接近这组数据的中位数和众数.因此,如果你是一名普通技术人员,你可根据该部门员工工资的中位数和众数来考虑是否应聘.

从这个例子中我们看到,在一组相差较大的数据中,用中位数或众数作为表示这组数据特征的统计量往往更有意义.想一想,如果在一次考试中,全班同学的成绩的中位数是75分,你恰好得了75分,你知道自己的成绩在全班的位置吗?如果全班同学的成绩的平均分是75分呢?你能想出用“众数”的比较恰当的例子吗?



想一想

在歌手大奖赛中,去掉一个最高分和一个最低分后,将剩下分数的平均数作为这位歌手的最后得分,为什么?

平均数、中位数和众数都是数据的代表,它们从不同侧面反映了数据的集中程度,但也存在局限性.如平均数容易受极端值的影响;中位数不能充分利用全部数据信息;当一组数据出现多个众数时,这时众数就没有多大的意义.



课内练习

KENEILIANXI

- 某风景区在“五一”黄金周期间,每天接待的旅游人数统计如下:

| 日期 | 5月1日 | 5月2日 | 5月3日 | 5月4日 | 5月5日 | 5月6日 | 5月7日 |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|
| 人数(万人) | 1.2 | 2 | 2.5 | 2 | 1.2 | 2 | 0.6 |

表中表示人数这组数据中,众数和中位数分别是()

- (A) 1.2万, 2万. (B) 2万, 2.5万.
 (C) 2万, 2万. (D) 1.2万, 2.5万.
- 在一组数据1, 0, 4, 5, 8中插入一个数据 x , 使该组数据的中位数为3, 则 $x=$ _____.

3. 甲、乙两班同学举行电脑汉字输入速度比赛,各派10名选手参加,参赛选手每分输入汉字个数统计如下:

| 输入汉字(个) | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 众数 | 中位数 | 平均数 |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|
| 甲班学生(人) | 1 | 0 | 1 | 5 | 2 | 1 | | | |
| 乙班学生(人) | 0 | 1 | 4 | 1 | 2 | 2 | | | |

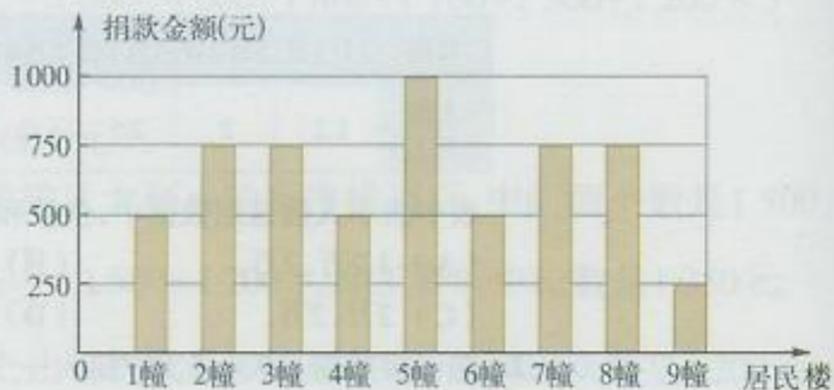
- (1) 分别求出各班选手每分输入汉字个数的平均数、中位数和众数,并填入上表;
 (2) 根据(1)中的结果,对两班选手的汉字输入速度作简短评论.



作业题

ZUOYETI

- A组**
- 数据2,4,4,5,3,9,4,5,1,8的众数是_____,中位数是_____,平均数是_____.
 - 在演唱比赛中,10位评委给一名歌手的打分如下(单位:分):
9.73, 9.66, 9.83, 9.76, 9.86, 9.79, 9.85, 9.68, 9.86, 9.74.
去掉一个最高分和一个最低分,这名歌手的最后得分(平均数)是_____.
 - 在一次“我为山区儿童献爱心”的捐赠活动中,某社区1~9幢居民捐赠金额统计图如图.求该社区每幢居民楼捐款金额的平均数、中位数和众数.它们有什么实际意义?



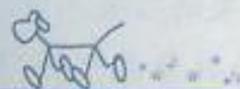
(第3题)

4. 据调查,某班30名学生所穿鞋子鞋号统计如下:

| 鞋号 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|------|----|----|----|----|----|
| 学生人数 | 7 | 6 | 15 | 1 | 1 |

- (1) 求该班学生所穿鞋子鞋号的平均数、中位数和众数;
 (2) 这组数据的平均数、中位数和众数有什么实际意义?

- B组**
- 某校元旦文娱演出中,10位评委给某个节目打分如下(单位:分):
7.20, 7.25, 7.00, 7.10, 9.50, 7.30, 7.20, 7.20, 6.10, 7.25.
 (1) 该节目的平均得分是多少?此得分能反映该节目的水平吗?
 (2) 求这10个数据的中位数和众数;
 (3) 在平均数、中位数、众数这三个统计量中,你认为哪一个统计量比较恰当地反映了该节目的水平?



YUEDUCAILIAO 阅读材料



利用计算机求平均数、中位数和众数

利用常见的Excel软件不仅可以进行数据的排序和制作统计图,还可以很方便地求出平均数、中位数和众数.以4.3节例题为例,某工程咨询公司技术部门员工一月份工资分别为(单位:元):

5 000, 4 000, 1 800, 1 700, 1 500, 1 200, 1 200, 1 200, 1 000, 400.

求这组数据的平均数、中位数和众数.具体操作步骤如下:

第1步 启动Excel,屏幕上出现一张工作表,将10名员工的工资数值依次输入表格中的B列(A列可输入序号或员工姓名、代号)



等),如图4-1.

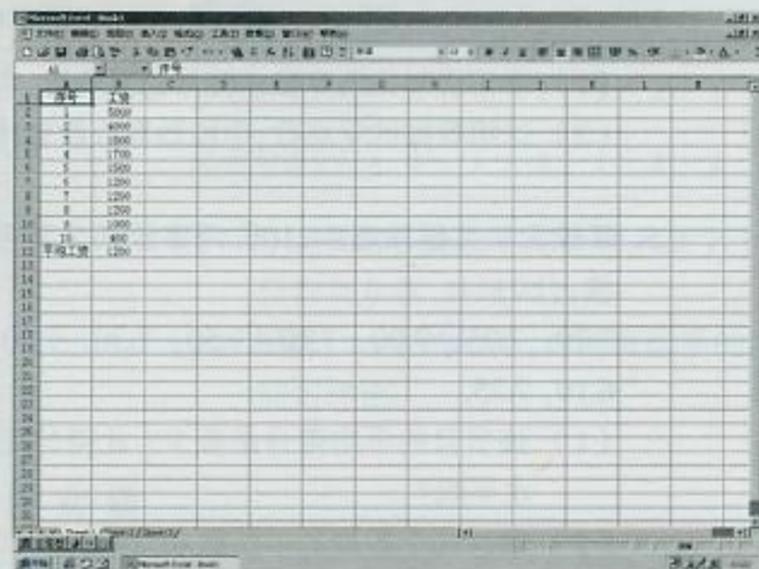


图4-1

第2步 求平均数(或中位数,众数).在B列的数据下方选中一个空格,比如“B12”单元格,作为显示计算结果的位置.

(1) 依次单击菜单栏中“ $F(x)$ ”;选择函数分类中的“常用函数”,单击函数名中“AVERAGE”,再单击“确定”;

(2) 在对话框中的“Number 1”右侧中,输入工作表中数据的位置:B2:B11,表示从B列第2行至第11行,即对B列第2行至第11行的数据求平均数,再按“确定”,这时在“B12”单元格上就会显示计算结果1900,如图4-1.

这样就完成了这10个数据平均数的计算.

类似地,单击函数名“MEDIAN”,可得“中位数”1350;单击函数名“MODE”,可得“众数”1200.

请按上述步骤求下列一组数据的平均数、中位数和众数:

29.8, 30.0, 30.0, 30.0, 30.2, 31.2, 31.7, 33.6, 34.5, 44.0.



4.4

方差和标准差



FANGCHAHEBIANZHUNCHA

要选拔射击手参加射击比赛,应该挑选测试成绩中曾达到最好成绩的选手,还是成绩最稳定的选手?



合作学习

HEZUOXUEXI

甲、乙两名射击手的测试成绩统计如下:

表4-3

| | 第一次 | 第二次 | 第三次 | 第四次 | 第五次 |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 甲命中环数 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 |
| 乙命中环数 | 10 | 6 | 10 | 6 | 8 |

- (1) 请分别算出甲、乙两名射击手的平均成绩;
- (2) 请根据这两名射击手的成绩在图4-2中画出折线统计图;
- (3) 现要挑选一名射击手参加比赛,你认为挑选哪一位比较适宜?为什么?

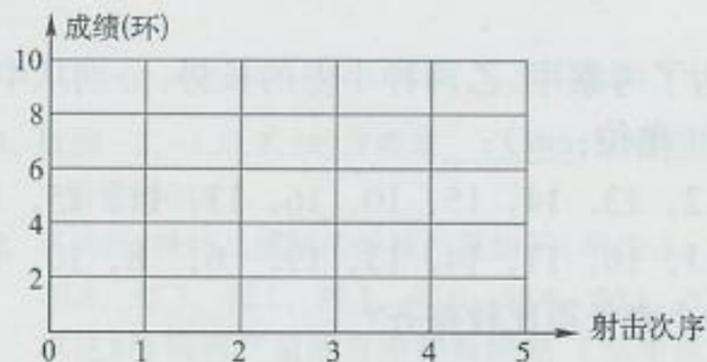


图4-2

甲、乙两名射击手的平均成绩相同,但是甲射击手每次的射击成绩都接近平均数8,而乙射击手每次的射击成绩偏离平均数较大.在评价数据的稳定性时,我们通常将各数据偏离平均数的程度作为指标.

现在我们计算一下甲、乙两名运动员每次射击成绩与平均成绩的偏差的平方和.

$$\begin{aligned} \text{甲: } & (7-8)^2 + (8-8)^2 + (8-8)^2 \\ & + (8-8)^2 + (9-8)^2 \\ & = 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{乙: } & (10-8)^2 + (6-8)^2 + (10-8)^2 \\ & + (6-8)^2 + (8-8)^2 \\ & = 16. \end{aligned}$$

你发现了什么?

容易看出,上述各偏差的平方和的大小还与射击的次数有关.所以我们可以进一步用各偏差平方的平均数来衡量数据的稳定性.

一般地,各数据与平均数的差的平方的平均数

$$S^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$$

叫做这组数据的**方差**(variance).

方差越大,说明数据的波动越大,越不稳定.

例 为了考察甲、乙两种小麦的长势,分别从中抽出10株苗,测得苗高如下(单位:cm):

甲:12, 13, 14, 15, 10, 16, 13, 11, 15, 11;

乙:11, 16, 17, 14, 13, 19, 6, 8, 10, 16.

哪种小麦长得比较整齐?

解 $\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{1}{10} (12+13+14+15+10+16+13+11+15+11) = 13(\text{cm});$



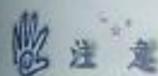
想一想
如果直接计算甲、乙每次射击成绩与平均数的偏差的和,结果如何?

$$\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{1}{10} (11+16+17+14+13+19+6+8+10+16) = 13(\text{cm}).$$

$$\begin{aligned} S_{\text{甲}}^2 &= \frac{1}{10} [(12-13)^2 + (13-13)^2 + (14-13)^2 + (15-13)^2 + (10-13)^2 \\ &+ (16-13)^2 + (13-13)^2 + (11-13)^2 + (15-13)^2 + (11-13)^2] \\ &= 3.6(\text{cm}^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{乙}}^2 &= \frac{1}{10} [(11-13)^2 + (16-13)^2 + (17-13)^2 + (14-13)^2 + (13-13)^2 \\ &+ (19-13)^2 + (6-13)^2 + (8-13)^2 + (10-13)^2 + (16-13)^2] \\ &= 15.8(\text{cm}^2). \end{aligned}$$

因为 $S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{乙}}^2$, 所以甲种小麦长得比较整齐.



注意
在比较两组数据的特征时,应取相同的样本容量.计算过程可以借助于计算器.

我们看到,数据的单位和方差的单位是不一致的,方差的单位是数据单位的平方.为使单位一致,可用方差的算术平方根:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]},$$

并把它叫做**标准差**(standard deviation).

上例中,两个标准差分别是:

$$S_{\text{甲}} = \sqrt{3.6} \approx 1.90(\text{cm}); \quad S_{\text{乙}} = \sqrt{15.8} \approx 3.97(\text{cm}).$$



课内练习

KENEILIANXI

1. 数据 -2, -1, 0, 3, 5 的方差是_____, 标准差是_____ (精确到0.01).
2. 某橘园8株新品橘树的单株产量如下(单位:kg): 49.8, 55.3, 42.1, 39.5, 46.0, 55.4, 50.1, 53.8. 求这8株橘树产量的方差和标准差(结果保留3个有效数字).





已知数据99, 97, 96, 98, 95, 把这组数据的每个数都减去97, 得到一组新数据. 将这两组数据画成折线图, 并用一条平行于横轴的直线来表示这两组数据的平均数. 观察你画的两个图形, 你发现了哪些有趣的结论?

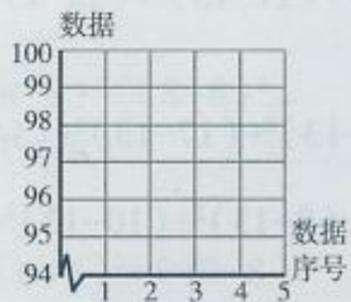


图 4-3

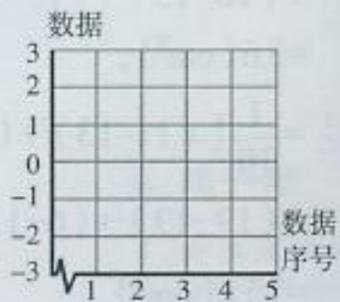


图 4-4



作业题

ZUOYETI

- A 组**
- 计算下列两组数据的方差和标准差(精确到0.1):
 - 1, 2, 0, -3, -2, 3, 0, 1;
 - 23, 24, 25, 23, 27, 24, 22, 25, 28, 24.
 - 已知一组数据1, 3, 2, 5, x 的平均数是3, 求这组数据的方差和标准差.
 - 小明和小聪最近5次数学测验的成绩如下:
小明: 76, 84, 80, 87, 73; 小聪: 78, 82, 79, 80, 81.
哪位同学的数学成绩比较稳定?
- B 组**
- 甲、乙两名工人加工同一种直径为10.00 mm的零件, 现从他们加工好的零件中各抽取6个, 量得它们的直径如下(单位: mm):
甲: 9.98, 10.02, 10.00, 10.00, 10.01, 9.99;
乙: 10.00, 10.03, 10.00, 9.97, 10.10, 10.90.
根据上述数据, 如何评价两人的加工质量?
 - 已知数据 x_1, x_2, x_3 , 把每个数据都减去2, 得到一组新数据 $x_1' = x_1 - 2, x_2' = x_2 - 2, x_3' = x_3 - 2$.
(1) 这两组数据的平均数有什么关系?



- 这两组数据的方差相等吗? 为什么? 由此你能得到怎样的一般规律?



4.5

统计量的选择与应用

THE JIANXUE WENYUAN

怎样根据实际情况选择统计量?



公园里有一群游客正在做团体游戏, 他们的平均年龄是10岁. 根据这一统计量, 你能肯定这群游客都是小学生吗? 为什么? 要确定他们是否都是小学生, 还需要什么统计量来描述?

平均数、中位数、众数是描述一组数据集中程度的统计量, 方差、标准差是描述一组数据离散程度的统计量. 在实际生活中, 我们不仅关注数据的集中程度, 也关注数据的离散程度. 另外, 反映数据集中程度的三个统计量各有局限性, 因此要对统计量进行合理的选择和恰当的运用.

例 1 车间有15名工人, 某一天他们生产的机器零件个数统计如下:

表 4-4

| | | | | | | | | | |
|------------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| 生产零件的个数(个) | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 13 | 15 | 16 |
| 工人人数(人) | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |

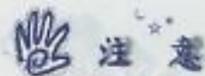
为了提高工作效率和工人的积极性, 管理者准备实行每天生产定额, 超产有奖的措施. 如果你是管理者, 你将如何确定这个“定额”?

分析 管理者所确定的“定额”应该是大多数工人经过努力能够完成的生产零件个数. “定额”太低, 不利于提高效率; “定额”太高, 不利于提高积极性, 因此我们可以从平均数、中位数、众数这几个统计量中去考虑如何确定定额.

解 15名工人这一天生产的机器零件的平均个数是

$$\bar{x} = \frac{6 \times 1 + 7 \times 2 + 8 \times 4 + 9 \times 1 + 10 \times 2 + 11 \times 1 + 13 \times 1 + 15 \times 2 + 16 \times 1}{15} \approx 10.1 (\text{个}).$$

如果以平均个数“10”作为定额,那么将有8名工人可能完不成任务,因此不可取;



注意
在实际情境中,车间管理者在决策时可能还需要考虑其他一些因素,如技术的更新、工人素质的提高等.

工人生产零件个数的中位数是9个.如果以中位数“9”作为定额,那么可能有7名工人完不成任务;

工人生产零件个数的众数是8个.如果以众数“8”作为定额,那么大多数工人都能完成或超额完成任务,有利于调动工人的积极性.因此可以把定额确定为8个.



例2 某公司计划从两家皮具生产能力相近的制造厂选择一家来承担外销业务.这两家厂生产的皮具款式和材料都符合要求,因此只需要检测皮具质量的克数是否稳定.现从两家提供的样品中各抽查10件,测得它们的质量如下(单位:g):

甲:500, 499, 500, 500, 503, 498, 497, 502, 500, 501;

乙:499, 500, 498, 501, 500, 501, 500, 499, 500, 502.

你认为应该选择哪一家制造厂?

解 $\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{1}{10} (500 + 499 + 500 + 500 + 503 + 498 + 497 + 502 + 500 + 501)$
 $= 500 (\text{g});$

$$\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{1}{10} (499 + 500 + 498 + 501 + 500 + 501 + 500 + 499 + 500 + 502)$$

$$= 500 (\text{g}).$$

两厂家生产的皮具的平均质量都是500 g.

$$S_{\text{甲}}^2 = \frac{1}{10} [(500-500)^2 + (499-500)^2 + (500-500)^2$$

$$+ (500-500)^2 + (503-500)^2 + (498-500)^2 + (497-500)^2$$

$$+ (502-500)^2 + (500-500)^2 + (501-500)^2]$$

$$= 2.8 (\text{g}^2);$$

$$S_{\text{乙}}^2 = \frac{1}{10} [(499-500)^2 + (500-500)^2 + (498-500)^2$$

$$+ (501-500)^2 + (500-500)^2 + (501-500)^2 + (500-500)^2$$

$$+ (499-500)^2 + (500-500)^2 + (502-500)^2]$$

$$= 1.2 (\text{g}^2).$$

因为 $S_{\text{甲}}^2 > S_{\text{乙}}^2$, 所以乙厂制造的皮具质量比较稳定, 应该选择乙厂.



课内练习

KENEILIANXI



1. 某农场种植甲、乙两种不同品种的水稻,6年中各年每 $\frac{1}{15}$

公顷的平均产量如下(单位:kg):

甲:450, 458, 450, 425, 455, 462;

乙:446, 476, 473, 429, 432, 444.

问哪一个品种水稻的产量比较稳定?

2. 甲、乙两家建筑材料厂对他们所生产的砖的抗断强度进行抽检,获得下面两组数据(单位:kg/cm²):

甲厂:32.50, 29.66, 31.64, 30.00, 31.77, 31.01,

30.76, 31.24, 31.87, 31.05;

乙厂:30.00, 29.56, 32.02, 33.00, 29.32, 30.37,

29.98, 32.35, 32.86, 32.04.

请根据这两组数据评判两厂生产的砖的质量优劣.



作业题

ZUOYETI



- A组** 1. 甲、乙两个小组各10名学生某次数学测验成绩如下(单位:分):

甲组:76, 90, 84, 86, 81, 87, 86, 82, 85, 83;

乙组:82, 84, 85, 89, 79, 80, 91, 89, 79, 74.

请你选用合适的统计量,对这两组学生的这次测验成绩作出评价.

2. 8月份的某一天,我国东部五个城市:上海、南京、杭州、福州、济南的日最高气温依次是 34°C , 32°C , 32°C , 36°C , 33°C ;我国西部五个城市:拉萨、西安、兰州、银川、西宁的日最高气温依次是 21°C , 33°C , 28°C , 30°C , 26°C .请利用平均数、方差等统计量比较我国东部城市和西部城市8月份日最高气温的特点.
3. 为了选拔一名同学参加全市中学生射击比赛,某校对甲、乙两名同学的射击水平进行了测试,两人各射靶10次,统计结果如下:

| | | | | | | | | | | |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|----|---|---|
| 甲成绩(环数) | 7 | 8 | 6 | 8 | 6 | 5 | 9 | 10 | 7 | 2 |
| 乙成绩(环数) | 9 | 5 | 7 | 8 | 7 | 6 | 8 | 6 | 7 | 7 |

比较甲、乙两名同学的射击水平,谁的成绩较好?你认为学校派谁参加比赛比较适合?请说明理由.

- B组** 4. 用某型号的全自动磨床加工一批零件内孔,零件内径合格尺寸是(单位:毫米): $10.000 \leq \phi D \leq 10.010$,质检员每隔一定时间抽取20件进行检测.除要求每件都符合合格尺寸外,还要求样本方差 $S^2 \leq 4.5 \times 10^{-6}$ (单位:平方微米).如果 $S^2 > 4.5 \times 10^{-6}$,就要停机调试.现测得20件零件的内径数据如下:

| | | | | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 内径(毫米) | 10.001 | 10.002 | 10.003 | 10.004 | 10.005 | 10.006 | 10.007 | 10.008 | 10.010 |
| 件数 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 2 | 2 | 1 |

请你分析是否需要停机调试.

- C组** 5. 在某闹市区禁止汽车鸣笛前后,交警支队连续10天在每天上午9时测量噪音值,结果如下(单位:分贝):

| | | | | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 禁止鸣笛前 | 73 | 65 | 80 | 71 | 67 | 78 | 70 | 69 | 76 | 72 |
| 禁止鸣笛后 | 40 | 38 | 36 | 41 | 35 | 36 | 37 | 34 | 37 | 36 |

- (1) 请分别计算禁止鸣笛前后两次测量的样本平均数和标准差;
- (2) 通过上述测量和统计,分析汽车鸣笛与城市噪音的关系.



设计题

SHEJITI

为了了解学校各年级男、女同学在身高方面的差别,你认为应怎样抽样并获取数据?对所得数据计算哪些统计量(如平均数、中位数、众数、方差、标准差等)?请以4~6人为一组,先设计一个方案,选择某一年级进行收集数据,再作必要的整理和分析,并写一份书面报告.要求报告中包括以下内容:介绍所作抽样、调查、统计的具体过程,并阐述所选择年级男、女生的身高差别和得到该结论的依据.

小结

1. 从考察对象中抽取一部分对象作调查分析叫做_____.
2. 在统计中,我们将要考察的对象的全体叫做_____.其中每一个考察对象叫做_____,从总体中抽取的一部分个体的集体叫做这个总体的一个_____,_____叫做样本容量.
3. 如果有 n 个数 x_1, x_2, \dots, x_n ,我们把_____叫做这 n 个数的算术平均数,简称平均数.
一组数据按大小顺序排列,位于最中间的一个数据(或最中间两个数据的平均数)叫做这组数据的_____.
一组数据中出现次数最多的那个数据,叫做这组数据的_____.
4. 各数据与平均数的差的平方的平均数 $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$,叫做这组数据的_____.方差越大,说明数据的波动_____.

方差的算术平方根 $S=$ _____，叫做这组数据的_____。

5. 主要方法和技能

- (1) 求一组数据的平均数、加权平均数；
- (2) 求一组数据的中位数和众数；
- (3) 求一组数据的方差和标准差；
- (4) 利用样本估计总体。

目标与评定

目标 1 (4.1节)

- 了解抽样的概念，了解总体、个体、样本、样本容量等概念，感受抽样的必要性，体会不同的抽样可能得到不同的结果。
- 初步体会用样本估计总体的思想。

1. 为制订某市七、八、九年级学生校服的生产计划，有关部门需要了解这三个年级男生的身高情况。现有三种调查方案：

- ① 测量参加学校男子篮球、排球队的七、八、九年级共180名学生的身高；
- ② 查阅有关外地七、八、九年级共180名男生身高的统计资料；
- ③ 在该市的市区和郊县均任选3所初中，在这6所学校七、八、九各年级的一班中，用抽签的方法分别选出10名男生，然后测量他们的身高。

你认为采用上述哪一种调查方案比较合理？为什么？

2. 为了了解北京、上海、广州三个城市八年级学生的血压情况，请设计一种抽样调查方案（只要求写出操作的步骤）。

目标 2 (4.2节, 4.3节)

- 理解并会计算平均数、加权平均数，会视具体问题用适当方法求平均数，能用样本的平均数来估计总体的平均数。
 - 理解中位数、众数的意义，会求一组数据的中位数、众数。
 - 能选择合适的统计量表示数据的集中程度。
3. 某班30名学生的身高情况如下表（单位：m）：

| | | | | | | |
|----|------|------|------|------|------|------|
| 身高 | 1.45 | 1.48 | 1.50 | 1.53 | 1.56 | 1.60 |
| 人数 | 2 | 5 | 6 | 8 | 5 | 4 |

这30名学生的平均身高是_____。

4. 某班5名同学分别记录了自己家中一周内丢弃的塑料袋的数量，结果如下（单位：个）：
33, 25, 28, 26, 23.
如果该班有45名学生，估计一周内该班全体同学家中丢弃的塑料袋数量。
5. 求下列数据的众数和中位数：
(1) -1, 2, -2, 0, 2, 3;
(2) 13, 8, 9, 8, 8, 9, 9, 9, 10.
6. 爱民商贸公司10名销售员去年完成的销售额情况如下：

| | | | | | | | |
|----------|---|---|---|---|---|---|----|
| 销售额(万元) | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 |
| 销售员人数(人) | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |

- (1) 求销售额的中位数、众数，以及平均每人完成的销售额；
- (2) 根据第(1)题的结果评价该公司销售员的销售能力。

目标 3 (4.4节)

- 了解方差、标准差的概念，会求一组数据的方差、标准差，并会用它们表示数据的离散程度。
- 能用样本的方差来估计总体的方差。

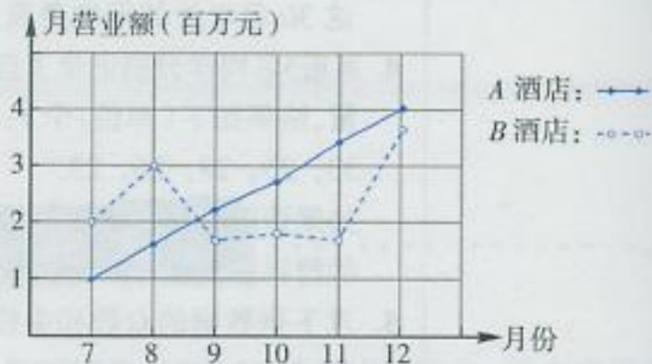


7. 从一个养鸡场里任意抽取5只鸡,称得它们的质量如下(单位:千克):3.0, 3.4, 3.1, 3.3, 3.2. 这组数据的样本方差 $S^2 =$ _____.
8. 某校从甲、乙两名优秀选手中选一名参加全市中小学生的男子100米跑项目,该校预先对这两名选手测试了8次,测试成绩如下表:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 甲的成绩(秒) | 12 | 12.3 | 13 | 12.9 | 13.1 | 12.5 | 12.4 | 12.6 |
| 乙的成绩(秒) | 12.1 | 12.4 | 12.8 | 13 | 12.2 | 12.7 | 12.3 | 12.5 |

为了衡量这两名选手100米跑的水平,你选择哪些统计量? 请求出这些统计量. 你认为选派谁比较合适? 为什么?

9. 有A, B两家酒店去年下半年的月营业额折线统计图如图.



(第9题)

- 要评价两家酒店月营业额的平均水平,你选择什么统计量? 求出这个统计量;
- 分别求出两家酒店各相邻两月的月营业额变化数量,得出两组新数据,然后求出两组新数据的方差. 这两个方差的大小反映了什么?



103.3, 103.35, 103.58, 104.33, 109.27, 124.4, 141.75, 150.3. 而在6月1日下闸后半个月内上述地点的水位的海拔高度分别为(米):

135, 138, 140, 142, 147, 150, 162, 172.

- 分别求出上述两组数据的平均数、方差和标准差(结果保留3个有效数字);
- 利用什么统计量可以说明6月1日下闸后长江出现“高峡出平湖”的景象? 这种景象在下闸前后有哪些主要的变化?

目标 7 (4.5节)

- 初步会根据统计结果作出合理的判断和预测,体会统计对决策的作用,能比较清晰地表达自己的观点,并进行交流.
- 能综合运用统计知识解决一些简单的实际问题.

10. 世界最大的水利枢纽三峡工程,在2003年5月31日14时大坝下闸蓄水前,大坝库区内的茅坪二、巴东、巫山、秦山、万县、忠县、清溪场、长寿等8个地点的水位的海拔高度分别为(米):



某种礼花弹导火索的燃烧速度为 0.02 m/s , 点燃导火索的人需在礼花燃放前跑到 10 m 以外的安全区域. 如果人离开的速度为 3 m/s , 问导火索至少应多长?

本章将学习不等式及其基本性质, 一元一次不等式和一元一次不等式组及其解法. 通过本章的学习, 我们将找到解决上述问题的方法.

YIYUANYICIBUDENGSHI · YIYUANYICIBUDENGSHI

第 5 章

一元一次不等式

YIYUANYICIBUDENGSHI

CONTENTS

目录

| | |
|--------------|-----|
| 5.1 认识不等式 | 100 |
| 5.2 不等式的基本性质 | 104 |
| 5.3 一元一次不等式 | 108 |
| 5.4 一元一次不等式组 | 115 |
| ● 小结 | 121 |
| ● 目标与评定 | 122 |

5.1

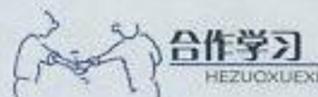
认识不等式



RENSHI BUBUNSHI

水电站水库的水位 x (米) 太低或太高时, 都将影响发电机的正常运作. 我们可用关于 x 的一个不等式刻画水位需满足的高度要求.

我们以前考虑的量与量之间的关系大多是相等关系, 在现实生活中, 除了相等量的情况外, 我们还经常遇到不等量的情况. 等式刻画了等量之间的关系, 而不等量之间的关系我们可用不等式来刻画.



合作学习
HEZUOXUEXI

下列问题中的数量关系能用等式表示吗? 若不能, 应该用怎样的式子来表示?

(1) 图5-1是公路上对汽车的限速标志, 表示汽车在该路段行驶的速度不得超过 40 km/h . 用 $v \text{ (km/h)}$ 表示汽车的速度, 怎样表示 v 与 40 之间的关系?



图 5-1

(2) 据科学家测定, 太阳表面的温度不低于 $6\,000 \text{ }^\circ\text{C}$. 设太阳表面的温度为 $t \text{ (}^\circ\text{C)}$, 怎样表示 t 与 $6\,000$ 之间的关系?

(3) 如图5-2, 天平左盘放3个乒乓球, 右盘放 5 g 砝码, 天平倾斜. 设每个乒乓球的质量为 $x \text{ (g)}$, 怎样表示 x 与 5 之间的关系?



图 5-2

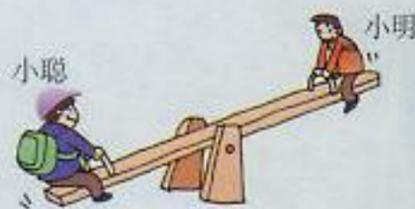


图 5-3

(4) 如图5-3, 小聪与小明玩跷跷板. 大家都不用力时, 跷跷板左低、右高. 小聪的身体质量为 $p \text{ (kg)}$, 书包的质量为 2 kg , 小明的身体质量为 $q \text{ (kg)}$, 怎样表示 p, q 之间的关系?

(5) 要使代数式 $\frac{x+3}{x-3}$ 有意义, x 的值与 3 之间有什么关系?

像 $v \leq 40, t \geq 6\,000, 3x > 5, q < p+2, x \neq 3$ 这样, 用符号 “ $<$ ” (或 “ \leq ”), “ $>$ ” (或 “ \geq ”), “ \neq ” 连接而成的数学式子, 叫做不等式 (inequality). 这些用来连接的符号统称不等号 (inequality symbol).

例 1 根据下列数量关系列不等式:

- (1) a 是正数;
- (2) y 的 2 倍与 6 的和比 1 小;
- (3) x^2 减去 10 不大于 10;
- (4) 设 a, b, c 为一个三角形的三条边长, 两边之和大于第三边.

解 (1) $a > 0$; (2) $2y+6 < 1$; (3) $x^2-10 \leq 10$;
(4) $a+b > c, a+c > b, b+c > a$.



做一做
ZUOYIZUO

- (1) 已知 $x_1=1, x_2=2$, 请在数轴上表示出 x_1, x_2 的位置;
- (2) $x < 1$ 表示怎样的数的全体?

$x < a$ 表示小于 a 的全体实数, 在数轴上表示 a 左边的所有点, 不包括 a 在内 (如图 5-4) ^①; $x \geq a$ 表示大于或等于 a 的全体实数, 在数轴上表示 a 右边的所有点, 包括 a 在内 (如图 5-5); $b < x < a$ ($b < a$) 表示大于 b 而小于 a 的全体实数, 在数轴上表示如图 5-6. 你能在数轴上分别类似地表示 $x > a, x \leq a$ 和 $b \leq x < a$ ($b < a$) 吗?

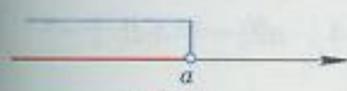


图 5-4

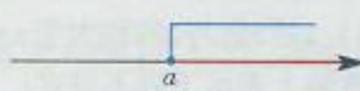


图 5-5



图 5-6

^① 为表示 a 为任意值, 如图 5-4, 图 5-5 这样的数轴中不标注原点和单位长度, 下同.

例 2 一座小水电站的水库水位在12~20 m (包括12 m, 20 m) 时, 发电机能正常工作. 设水库水位为 x (m).

(1) 用不等式表示发电机正常工作的水位范围, 并把它表示在数轴上;

(2) 当水位在下列位置时, 发电机能正常工作吗?

① $x_1=8$; ② $x_2=10$; ③ $x_3=15$; ④ $x_4=19$.

请用不等式和数轴给出解释.

解 (1) 用不等式表示发电机能正常工作的水位范围是 $12 \leq x \leq 20$, 在数轴上表示如图5-7.

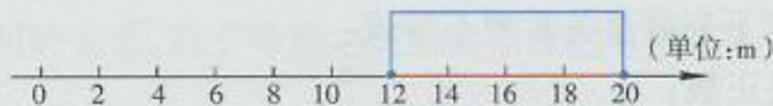


图 5-7

(2) 把 $x_1=8, x_2=10, x_3=15, x_4=19$ 表示在数轴上, 如图5-8.

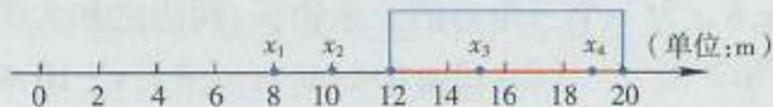


图 5-8

显然, x_3, x_4 满足不等式 $12 \leq x \leq 20$, 而 x_1, x_2 不满足. 也就是说, 当水位在15 m, 19 m 时, 发电机能正常工作; 当水位在8 m, 10 m 时, 发电机不能正常工作.

课内练习
KENEILIANXI

1. 选择适当的不等号填空:

- (1) $2 \underline{\hspace{1cm}} 3$; (2) $-\sqrt{8} \underline{\hspace{1cm}} -3$;
(3) $-a^2 \underline{\hspace{1cm}} 0$; (4) 若 $x \neq y$, 则 $-x \underline{\hspace{1cm}} -y$.

2. 根据下列数量关系列出不等式:

- (1) x 的4倍小于3; (2) y 减去1不大于2;
(3) x 的2倍与1的和大于 x ; (4) a 的一半不小于 -7.

3. 在数轴上表示下列不等式:

- (1) $x > -3$; (2) $x \geq -\sqrt{2}$; (3) $x < 1.5$.



作业题

ZUOYETI

A组 1. 选择适当的不等号填空:

- (1) $8 \underline{\hspace{1cm}} 11$; (2) $-\frac{10}{11} \underline{\hspace{1cm}} -\frac{9}{10}$;
(3) $-\sqrt{2} \underline{\hspace{1cm}} -\sqrt{3}$; (4) $(a-b)^2 \underline{\hspace{1cm}} 0$.

2. 用等式或不等式表示下列问题中的数量关系:

- (1) 乘公共汽车时, 身高不超过1 m 的儿童免费. 记可以免费乘车的儿童的身高为 h (m);
(2) 某农户今年的收入比去年多1.5万元. 记去年的收入为 p 万元, 今年的收入为 q 万元.

3. 根据下列数量关系列不等式:

- (1) x 的7倍减去1是正数;
(2) y 的 $\frac{1}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$ 的和不大于0;
(3) 正数 a 与1的和的算术平方根大于1;
(4) y 的20% 不小于1与 y 的和.

4. 在数轴上表示下列不等式:

- (1) $x < 4$; (2) $x \geq -3$; (3) $-2 < x \leq 4$.

B组 5. 实数 a, b 在数轴上的位置如图所示, 选择适当的不等号填空:

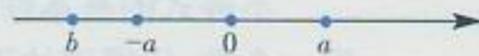
(1) $a \underline{\hspace{1cm}} b$;

(2) $|a| \underline{\hspace{1cm}} |b|$;

(3) $a+b \underline{\hspace{1cm}} 0$;

(4) $a-b \underline{\hspace{1cm}} 0$;

(5) $ab \underline{\hspace{1cm}} 0$.



(第5题)

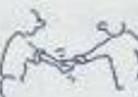
6. 在数轴上表示不等式 $-2 \leq x < \sqrt{17}$ 和 x 的下列取值: -1, -2, 0, 4, $4\frac{1}{2}$, 并利用数轴说明, x 的这些取值中, 哪些满足不等式 $-2 \leq x < \sqrt{17}$, 哪些不满足.

5.2

不等式的基本性质



课前图的问题中,你认为 ac 是大于 bc , 还是小于 bc ? 用几个具体的例子试试看.



合作学习

HEZUOXUEXI

(1) 已知 $a < b$ 和 $b < c$, 在数轴上表示如图 5-9.



图 5-9

由数轴上 a 和 c 的位置关系, 你能得出什么结论? 你能举几个具体的例子说明吗?

(2) 若 $a > b$, 则 $a+c$ 与 $b+c$ 哪个较大? $a-c$ 与 $b-c$ 呢? 请分别用数轴上点的位置关系和具体的例子加以说明.

不等式的基本性质 1 若 $a < b, b < c$, 则 $a < c$. 这个性质也叫做不等式的传递性.

不等式的基本性质 2 不等式的两边都加上 (或减去) 同一个数, 所得到的不等式仍成立.

即 如果 $a > b$, 那么 $a+c > b+c, a-c > b-c$;
如果 $a < b$, 那么 $a+c < b+c, a-c < b-c$.



做一做

ZUOYIZUO

选择适当的不等号填空:

(1) $\because 0 \underline{\quad} 1,$

$\therefore a \underline{\quad} a+1$ (不等式的基本性质 2);
(2) $\because (a-1)^2 \underline{\quad} 0,$
 $\therefore (a-1)^2 - 2 \underline{\quad} -2$ (不等式的基本性质 2).

现在让我们来考虑不等式的两边都乘 (或都除以) 同一个不为零的数的情况.

对于不等式 $2 < 3$, 两边同乘 5 (或除以 $\frac{1}{5}$), 所得的不等式 $2 \times 5 < 3 \times 5$ 仍成立吗? 若两边同乘 -5 (或除以 $-\frac{1}{5}$) 呢? 请再举几个例子试一试, 你有什么结论?

一般地, 我们有下面的结论:

不等式的基本性质 3 不等式的两边都乘 (或都除以) 同一个正数, 所得的不等式仍成立; 不等式的两边都乘 (或都除以) 同一个负数, 必须把不等号的方向改变, 所得的不等式成立.

即 如果 $a > b$, 且 $c > 0$, 那么 $ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$;

如果 $a > b$, 且 $c < 0$, 那么 $ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.



做一做

ZUOYIZUO

我国于 2001 年 12 月 11 日正式加入世界贸易组织 (WTO). 加入前, 产品 A 的进口税超过产品 B 的进口税的 1 倍以上; 加入后, 这两种产品的进口税都下调了 15%. 你认为加入后产品 A 的进口税仍超过产品 B 的进口税的 1 倍以上吗? 请说明理由.

例 已知 $a < 0$, 试比较 $2a$ 与 a 的大小.

分析 比较 $2a$ 与 a 的大小, 可以利用不等式的基本性质, 也可以利用数轴, 直接得出 $2a$ 与 a 的大小.

解法一 $\because 2 > 1, a < 0$ (已知),

$\therefore 2a < a$ (不等式的基本性质3).

解法二 在数轴上分别表示 $2a$ 和 a 的点 ($a < 0$), 如图5-10.

$2a$ 位于 a 的左边, 所以 $2a < a$.



想一想

还有其他比较 $2a$ 与 a 的大小的方法吗?

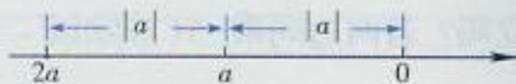


图5-10



课内练习
KENEILIANXI

1. 填空:

(1) 若 $x+1 > 0$, 两边同加上 -1 , 得 _____

(依据: _____);

(2) 若 $2x > -6$, 两边同除以 2 , 得 _____

(依据: _____);

(3) 若 $-\frac{1}{3}x \leq \frac{1}{2}$, 两边同乘 -3 , 得 _____

(依据: _____).

2. 选择适当的不等号填空:

(1) 若 $a > -b$, 则 $a+b$ _____ 0 ;

(2) 若 $-a < b$, 则 a _____ $-b$;

(3) 若 $-a > -b$, 则 $2-a$ _____ $2-b$;

(4) 若 $a > 0$, 且 $(1-b)a < 0$, 则 b _____ 1 ;

(5) 若 $a < b, b < 2a-1$, 则 a _____ $2a-1$.



探究讨论

比较等式与不等式的基本性质.

例如, 等式是否有与不等式的基本性质1类似的传递性? 不等式是否有与等式的基本性质类似的移项法则? 你可以用列表的方式进行对比.

(请与你的同伴交流)



作业题

ZUOYETI

A组 1. 选择适当的不等号填空:

(1) 若 $a > b$, 则 b _____ a ;

(2) 若 $a > b$, 且 $b > c$, 则 a _____ c .

2. 按下列条件, 写出仍能成立的不等式:

(1) $\sqrt{7} > \sqrt{5}$, 两边都减去 $\sqrt{5}$, 得 _____;

(2) $x + \frac{1}{2} < 0$, 两边都加上 $(-\frac{1}{2})$, 得 _____;

(3) $\frac{9m}{7} > \frac{4n}{3}$, 两边都乘 21 , 得 _____;

(4) $-0.9 < -0.3$, 两边都除以 (-0.3) , 得 _____;

(5) $-\frac{8}{7}x \leq 1$, 两边都乘 $(-\frac{7}{8})$, 得 _____.

3. 某品牌计算机键盘的单价在60元至70元之间, 买3个这样的键盘需要多少钱(用适当的不等式表示)?

4. 若 $x > y$, 比较 $2-3x$ 与 $2-3y$ 的大小, 并说明理由.

B组 5. 若 $x < y$, 且 $(a-3)x > (a-3)y$, 求 a 的取值范围.

6. 老王和小张同在一家公司工作. 老王每月的工资原来比小张高, 但不到他的两倍. 新年开始时, 公司给他们同时加薪10%, 问加薪后老王的工资仍比小张的工资高, 但低于两倍吗? 请说明理由. 如果每人各加薪200元呢?

5.3

一元一次不等式



YIYUAN YICHI BUBENSHI

某种光盘的存储容量为 670 MB^①。一个文件平均占用空间为 13 MB, 这张光盘能存放 52 个这样的文件吗?

观察下列不等式:

(1) $x > 4$;

(2) $3x > 30$;

(3) $\frac{2x+1}{3} < \frac{x}{2}$;

(4) $1.5x+12 < 0.5x+1$.

这些不等式有哪些共同的特征? 请将它们与一元一次方程比较.

不等号的两边都是整式, 而且只含有一个未知数, 未知数的最高次数是一次, 这样的不等式叫做一元一次不等式 (linear inequality in one unknow). 能使不等式成立的未知数的值的全体叫做不等式的解集, 简称为不等式的解. 例如, $3x > 30$ 的解是 $x > 10$, 表示大于 10 的实数的全体, 在数轴上表示如图 5-11.

想一想
把 $x=10.1$ 代入不等式 $3x > 30$, 不等式成立吗? 能否因此就说不等式的解是 $x=10.1$?

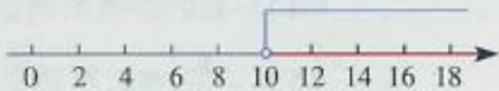


图 5-11

例 1 解下列不等式, 并把解表示在数轴上:

(1) $4x < 10$;

(2) $-\frac{3}{5}x \geq 1.2$.

分析 解不等式就是利用不等式的基本性质, 把要求解的不等式变形为 " $x > a$ " (或 " $x \geq a$ ")、" $x < a$ " (或 " $x \leq a$ ") 的形式.

① MB 是计算机储存信息的容量单位, 表示百万字节.

解 (1) 两边同除以 4, 得 $x < \frac{5}{2}$.

表示在数轴上如图 5-12 所示.

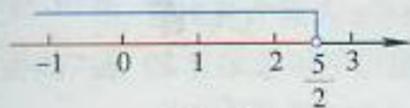


图 5-12

(2) 两边同除以 $-\frac{3}{5}$, 得 $x \leq -2$.

不等式的解表示在数轴上如图 5-13 所示.

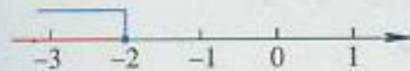


图 5-13

注意

不等式的两边同乘 (或除以) 同一个负数, 不等号要改变方向.

例 2 解不等式 $7x-2 \leq 9x+3$, 把解表示在数轴上, 并求出不等式的负整数解.

解 先在不等式的两边同加上 $-9x$, 再在不等式的两边同加上 2, 得 $7x-9x \leq 3+2$.

合并同类项, 得 $-2x \leq 5$.

两边同除以 -2 , 得 $x \geq -\frac{5}{2}$.

不等式的解表示在数轴上如图 5-14 所示. 不等式的负整数解是 $x=-1$ 和 $x=-2$.

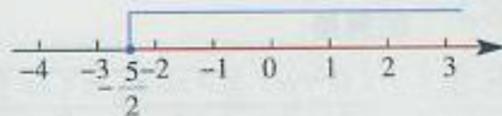


图 5-14

由例 2 可以看到, 把不等式中的任何一项的符号改变后, 从不等号的一边移到另一边, 所得到的不等式仍成立 (图 5-15). 也就是说, 在解不等式时, 移项法则同样适用.

$$\begin{array}{l} 7x - 2 \leq 9x + 3 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 7x - 9x \leq 3 + 2 \end{array}$$

图 5-15



1. 解下列不等式,并把解表示在数轴上:

(1) $1-x > 2$; (2) $5x-4 > 4-3x$;

(3) $-\frac{1}{7}x \leq 1$; (4) $6x-1 > 9x-4$.

2. 下列不等式的解法正确吗? 如果不正确,请改正:

(1) $-2x < -4$.

解:两边同除以 -2 ,得 $x < 2$;

(2) $x+1 > 2x-3$.

解:移项,得 $4 > x$,

即 $x > 4$.

3. 解不等式 $2.5x-4 < \frac{1}{2}x-1$,把解表示在数轴上,并求出适合不等式的正整数解.



作业题

ZUOYETI

A组 1. 填空:

(1) 不等式 $3x > 1$ 的解是 _____, 不等式 $-x > 3$ 的解是 _____;

(2) 不等式 $x+1 \geq 3$ 的解是 _____, 不等式 $2 < x-1$ 的解是 _____;

(3) 一个不等式的解在数轴上表示如图,则这个不等式的解是 _____.



(第1(3)题)

2. 解下列不等式,并把解表示在数轴上:

(1) $x-1 > 0$; (2) $-\frac{1}{2}x < 1$;

(3) $3x-1 \geq 2x+4$; (4) $5x-2 > 11x+3$.

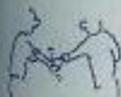
3. 解不等式 $0.5x-3 > -14-2.5x$,把解表示在数轴上,并求出适合不等式的最大负整数和最小正整数.

4. 某种光盘的存储容量为670 MB. 一个文件平均占用的空间为13 MB,问这张光盘最多能存放多少个这样的文件?

B组 5. 写出两个解为 $x > 8$ 的不等式.

6. 某电信公司手机收费有两种方案. 方案一:月租费50元,本地通话费0.40元/分;方案二:不收月租费,本地通话费0.60元/分. 张先生估计每月本地通话时间在250~300分(不包括250分)之间,问选择哪一种方案比较合算?

2



合作学习

HEZUOXUEXI

根据已学过的知识,你能解下列一元一次不等式吗?

(1) $5x > 3(x-2)+2$; (2) $2m-3 < \frac{7m+3}{2}$.

解一元一次不等式与解一元一次方程的步骤类似. 解一元一次不等式的一般步骤和根据如下:

| | 步骤 | 根据 |
|---|--|------------|
| 1 | 去分母 | 不等式的基本性质3 |
| 2 | 去括号 | 单项式乘以多项式法则 |
| 3 | 移项 | 不等式的基本性质2 |
| 4 | 合并同类项,得 $ax > b$, 或 $ax < b$ ($a \neq 0$) | 合并同类项法则 |
| 5 | 两边同除以 a (或乘 $\frac{1}{a}$) | 不等式的基本性质3 |

例1 解不等式 $3(1-x) > 2(1-2x)$.

解 去括号,得 $3-3x > 2-4x$.

移项,得 $-3x+4x > 2-3$.

合并同类项,得 $x > -1$.



例 2 解不等式 $\frac{1+x}{2} \leq \frac{1+2x}{3} + 1$, 并把解在数轴上表示出来.

解 去分母, 得 $3(1+x) \leq 2(1+2x) + 6$.

去括号, 得 $3+3x \leq 2+4x+6$.

移项, 得 $3x-4x \leq 2+6-3$.

合并同类项, 得 $-x \leq 5$.

两边同除以 -1 , 得 $x \geq -5$.

这个不等式的解表示在数轴上如图 5-16 所示.

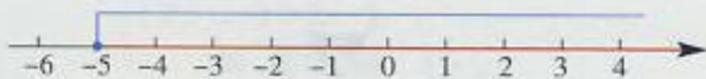


图 5-16



课内练习
KENEILIANXI

解下列不等式, 并把解在数轴上表示出来:

(1) $5x-3 < 1-3x$;

(2) $\frac{1}{3}y \geq 1 - \frac{1}{2}y$;

(3) $3(1-3x) - 2(4-2x) \leq 0$;

(4) $\frac{2x-1}{4} - \frac{1+x}{6} \geq 1$;

(5) $\frac{1}{6}(2-m) - 3 \geq \frac{m}{10}$.



作业题
ZUOYE TI

- A 组**
- 解下列不等式, 并把解在数轴上表示出来:
 - $3x-5 < 2(2+3x)$;
 - $3(5-x) > 2(x-2) - 4$.
 - 解下列不等式, 并把解在数轴上表示出来:
 - $\frac{2+x}{2} \geq \frac{2x-1}{3}$;
 - $x - \frac{x+2}{2} < \frac{2-x}{3}$.
 - 求适合不等式 $3(2+x) > 2x$ 的最小负整数.
- B 组**
- 一次生活常识知识竞赛一共有 20 道题, 答对一题得 5 分, 不答得 0 分, 答错扣 2 分. 小聪有 1 道题没答, 竞赛成绩超过 80 分, 问小聪至多答错了几道题?

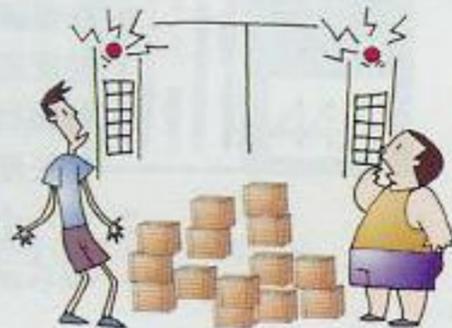
5. 解下列不等式:

(1) $1 - \frac{0.1x+1}{0.4} > \frac{1-0.15x}{0.5}$; (2) $x(x-1) \leq (x+1)^2$.



合作学习
HEZUOXUEXI

宾馆里一座电梯的最大限载量为 1 000 千克. 两名宾馆服务员要用电梯把一批重物从底层搬到顶层, 这两名服务员的身体质量分别为 60 千克和 80 千克, 货物每箱的质量为 50 千克, 问他们每次最多只能搬运重物多少箱?



建议讨论下列问题:

- 选择哪一种数学模型? 是列方程, 还是列不等式?
- 问题中有哪些相等的数量关系和不等数量关系?

适当地应用一元一次不等式, 可以刻画和解决很多实际生活中的有关数量不等关系的问题. 注意, 处理这类问题一般也可按照以前学过的解决问题的 4 个基本步骤来帮助思考和求解.

例 有一家庭工厂投资 2 万元购进一台机器, 生产某种商品. 这种商品每个的成本是 3 元, 出售价是 5 元, 应付的税款和其他费用是销售收入的 10%. 问至少需要生产、销售多少个这种商品, 才能使所获利润 (毛利润减去税款和其他费用) 超过投资购买机器的费用?

分析 每生产、销售一个这种商品的利润是 $(5-3-5 \times 10\%)$ 元, 因此生产、销售 x 个这种商品的利润是 $(5-3-5 \times 10\%)x$ 元. 问题中不等的数量关系是:

所获利润 $>$ 购买机器款.

解 设生产、销售这种商品 x 个, 则所得利润为 $(5-3-5 \times 10\%)x$ 元. 由题意, 得

$$(5-3-5 \times 10\%)x > 20\,000,$$

$$\text{解得 } x > 13\,333.\dot{3}.$$

答: 至少要生产、销售这种商品 13 334 个.



课内练习

KENEILIANXI

1. 在爆破时, 如果导火索燃烧的速度是 0.015 m/s , 人跑开的速度是 3 m/s , 那么要使点导火索的施工人员在点火后能够跑到 100 m 以外 (包括 100 m) 的安全地区, 这根导火索的长度至少应取多少 m ?
2. 举一个涉及量的不等关系的实际问题, 列出一元一次不等式, 并求解.



作业题

ZUOYETI

- A 组**
1. 已知一种卡车每辆至多能载 3 吨货物. 现有 100 吨黄豆, 若要一次运完这批黄豆, 至少需要这种卡车多少辆?
 2. 为了保证长方形水闸闸门开启时的最大过水面积不小于 90 m^2 , 如果闸门开启时的最大高度为 5 m , 那么闸门的宽度至少为多少 m ?
 3. 某企业向银行贷款 1 000 万元, 一年后归还银行 1 040 多万元, 问年利率在怎样的一个范围内?
- B 组**
4. 商店里 12 瓦 (即 0.012 千瓦) 节能灯的亮度相当于 60 瓦 (即 0.06 千瓦) 的白炽灯. 节能灯售价 70 元, 白炽灯售价 22 元. 如果电价是 0.5 元/千瓦时 , 问节能灯使用多少时间后, 总费用 (售价加电费) 比选用白炽灯的费用节省 (电灯的用电量 = 千瓦数 \times 用电时数)?
- C 组**
5. A, B, C, D 四座小山的山脚与学校的距离分别是 $9 \text{ km}, 11 \text{ km}, 12 \text{ km}, 14 \text{ km}$. 学校准备组织一次八年级学生登山活动, 计划

在上午 8 时出发, 以平均每时 3 km 的速度前进, 登山和在山顶活动的时间为 1 时, 下山的时间为 30 分, 再以平均每时 4 km 的速度返回, 在下午 4 时 30 分前赶回学校. 你认为哪几座山符合学校的计划?



5.4

一元一次不等式组

YIYUAN YICIDENSHI ZU

某单位从超市购买了墨水笔和圆珠笔共 15 桶, 所付金额超过 570 元, 但不到 580 元. 已知这两种笔每桶的单价如图所示, 设购买圆珠笔 x 桶, 你能列出几个不等式?



在现实生活中经常遇到一个未知数需要同时满足若干个不等式的情况, 如节前语问题中, 如果设购买圆珠笔的桶数为 x , 那么

$$\begin{cases} 44.9x + 34.9(15-x) < 580, & \text{①} \\ 44.9x + 34.9(15-x) > 570. & \text{②} \end{cases}$$

一般地, 由几个同一未知数的一元一次不等式所组成的一组不等式, 叫做一元一次不等式组. 例如, $\begin{cases} 3x-2 > 1-2x, \\ x \geq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 3.5x < 5x-2, \\ \frac{1-x}{2} > \frac{x-3}{3} \end{cases}$ 都是一元一次不等式组.

组成不等式组的各个不等式的解的公共部分就是不等式组的解. 当它们没有公共部分时, 我们称这个不等式组无解.

例 1 解一元一次不等式组 $\begin{cases} 3x+2 > x, & \text{①} \\ \frac{1}{3}x \leq 2. & \text{②} \end{cases}$

分析 根据一元一次不等式组的解的意义, 我们只要分别求出



①,②两个不等式的解,并把解表示在同一条数轴上,两个不等式的解的公共部分即为不等式组的解.

解 解不等式①,得 $x > -1$.

解不等式②,得 $x \leq 6$.

把①,②两个不等式的解表示在数轴上,如图5-17.

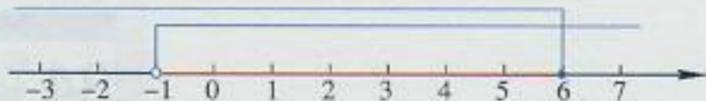


图5-17

所以原不等式组的解是 $-1 < x \leq 6$.

例2 解一元一次不等式组 $\begin{cases} 3-5x > x-2(2x-1), & \text{①} \\ \frac{3x-2}{4} > 2.5-\frac{x}{2}. & \text{②} \end{cases}$

解 解不等式①,去括号,得 $3-5x > x-4x+2$.

移项、整理,得 $-2x > -1$.

$$\therefore x < \frac{1}{2}.$$

解不等式②,去分母,得 $3x-2 > 10-2x$.

移项、整理,得 $5x > 12$.

$$\therefore x > \frac{12}{5}.$$

把①,②两个不等式的解表示在数轴上,如图5-18.

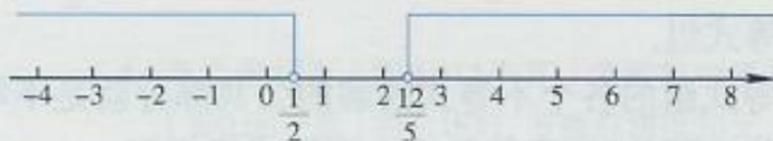


图5-18

所以原不等式组无解.



课内练习

KENEILIANXI

1. 利用数轴,分别求出满足下列各组不等式的 x 值的公共部分:

$$(1) \begin{cases} x > -3, \\ x \leq 4; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x > -2, \\ x > -1; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x < -\sqrt{10}, \\ x < -3; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x < -\frac{1}{2}, \\ x \geq -1.5. \end{cases}$$

2. 解下列一元一次不等式组:

$$(1) \begin{cases} 2x-1 > x+1, \\ x+8 < 4x-1; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 5x-2 > 3(x+1), \\ \frac{1}{2}x-1 \leq 7-\frac{3}{2}x. \end{cases}$$

3. 分别求出本节开头问题中购买墨水笔和圆珠笔的桶数.



解由两个一元一次不等式组成的不等式组,在取各个不等式的解的公共部分时,有几种不同情况?

若 $m < n$,你能说出下列四种情况下,不等式组的解吗?用数轴试一试.

$$(1) \begin{cases} x > m, \\ x < n; \end{cases} (2) \begin{cases} x > m, \\ x > n; \end{cases} (3) \begin{cases} x < m, \\ x < n; \end{cases} (4) \begin{cases} x < m, \\ x > n. \end{cases}$$

(请与你的同伴交流)



作业题

ZUOYETI

A组

1. 利用数轴,分别求出满足下列各组不等式的 x 值的公共部分:

$$(1) \begin{cases} x > -2, \\ x > 1; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x < -1.5, \\ x \leq -\sqrt{2}; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x \geq -3, \\ x < 1; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x \geq -\sqrt{3}, \\ x \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

2. 解下列一元一次不等式组:

$$(1) \begin{cases} 3x-2 > 4x, \\ 3-5x > 3x-5; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 5x+5 \geq 3x-2, \\ 1-2x > 3x; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2(1-3x) \leq 4x+1, \\ 2x-1 > 3(1-3x); \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \frac{1-5x}{2} \geq \frac{3x+1}{3} - 1, \\ 3(x-1) \leq 5(x+1) - 2. \end{cases}$$

3. 若不等式组 $\begin{cases} x > -a, \\ x \geq -b \end{cases}$ 的解为 $x \geq -b$, 则下列各式正确的是

()

(A) $a > b$. (B) $a < b$. (C) $b \leq a$. (D) $ab > 0$.

B 组 4. 解下列一元一次不等式组:

$$(1) \begin{cases} x-2(x-3) > 4, \\ \frac{x}{2} - (x+1) \leq 2-x; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 6-5\left(x-\frac{1}{5}\right) > -7x, \\ 3x-\frac{10x-5}{5} \geq \frac{4-2x}{2}. \end{cases}$$

2

例 3 某工厂用如图5-19所示的长方形和正方形纸板, 糊横式与竖式两种无盖的长方体包装盒, 如图5-20. 现有长方形纸板351张, 正方形纸板151张, 要糊的两种包装盒的总数为100个. 若按两种包装盒的生产个数分, 问有几种生产方案? 如果从原材料的利用率考虑, 你认为应选择哪一种方案?



图 5-19

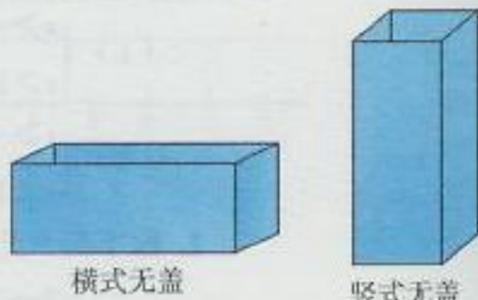


图 5-20

分析 和列方程解应用题一样, 当数量关系比较复杂时, 我们可以通过列表来分析:

| |  (个) |  (个) | 合计(张) | 现有纸板(张) |
|---|---|---|---------------|---------|
| | x | $100-x$ | | |
|  (张) | $3x$ | $4(100-x)$ | $3x+4(100-x)$ | 351 |
|  (张) | $2x$ | $100-x$ | $2x+100-x$ | 151 |

解 设生产横式无盖的长方体包装盒 x 个, 则生产竖式无盖的长方体包装盒 $(100-x)$ 个. 由题意, 得

$$\begin{cases} 3x+4(100-x) \leq 351, \\ 2x+100-x \leq 151. \end{cases}$$

化简, 得 $\begin{cases} 400-x \leq 351, \\ 100+x \leq 151. \end{cases}$

解这个不等式组, 得 $49 \leq x \leq 51$.

因为 x 是整数, 所以 $x_1=49, x_2=50, x_3=51$.

当 $x_1=49$ 时, $400-x_1=351, 100+x_1=149$, 长方形纸板恰好用完, 正方形纸板剩2张;

当 $x_2=50$ 时, $400-x_2=350, 100+x_2=150$, 长方形、正方形纸板各剩1张;

当 $x_3=51$ 时, $400-x_3=349, 100+x_3=151$, 长方形纸板剩2张, 正方形纸板恰好用完.

由于长方形纸板的面积大于正方形纸板的面积, 所以当 $x_1=49$ 时, 原材料的利用率最高.

答: 一共有三种生产方案: ①横式的包装盒生产49个, 竖式的包装盒生产51个; ②横式和竖式的包装盒各生产50个; ③横式的包装盒生产51个, 竖式的包装盒生产49个. 第①种方案原材料的利用率最高, 所以应选第①种方案.



课内练习

KENEILIANXI



(第2题)

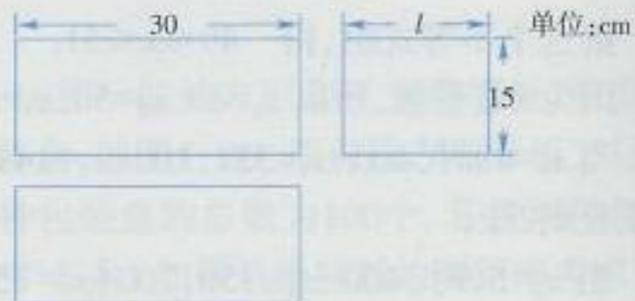
1. 把若干个苹果分给几名小朋友,如果每人分3个,余8个;如果每人分5个,最后一名小朋友能得到苹果,但不足5个.求小朋友的人数和苹果的个数.
2. 以3~4人为一组做这样一个游戏:用36根火柴棒首尾相接,围成一个等腰三角形(如图).最多能围成多少种不同的等腰三角形?说明你的理由.



作业题

ZUOYETI

- A组**
1. 游泳池的水质要求三次检验的pH值的平均值不小于7.2,且不大于7.8.前两次检验,pH值的读数分别是7.4,7.9,那么第三次检验的pH值应该为多少才能合格?
 2. 一个包装盒的三视图如图.若要求包装盒的表面积不小于 $5\,400\text{ cm}^2$,且不大于 $6\,300\text{ cm}^2$,求尺寸 l 的取值范围.



(第2题)

3. 一项工程估计需挖土 $600\sim 650\text{ m}^3$ (包括 600 m^3 和 650 m^3),由甲、乙两工程队同时施工.已知甲工程队每天挖土 24 m^3 ,问乙工程队每天应挖土多少 m^3 ,才能确保10天内完成任务?

- B组**
4. 某科技博览会上介绍了一种栽秧机器人(如图),每个这种机器人每时可以栽秧 $4\,000\sim 6\,000$ 株,而人工栽秧每人每时只能栽 $800\sim 1\,000$ 株.现大约有 $1\,000\,000$ 株秧苗要栽.

- (1) 如果用10个机器人完成栽秧任务,大约需要多少时间?
- (2) 如果要求在2时内完成栽秧任务,大约需要多少个机器人?



小结

1. 不等式的基本性质1 若 $a < b$, _____, 则 $a < c$, 这个性质叫做_____.

不等式的基本性质2 不等式的两边都加上(或减去)同一个_____, 所得的不等式仍成立.

不等式的基本性质3 不等式的两边都乘(或除以)同一个_____, 所得的不等式仍成立; 不等式的两边都乘(或除以)同一个负数, 必须_____, 所得的不等式成立.

2. 不等式的两边都是整式, 而且只含有_____未知数, 未知数的最高次数是_____的不等式, 叫做一元一次不等式. 能使不等式成立的未知数的值的全体叫做_____.

3. 主要方法和技能

- (1) 用不等式表示不等量关系;
- (2) 解简单的一元一次不等式(组), 并用数轴表示不等式(组)的解;
- (3) 应用一元一次不等式(组)解决简单的实际问题.



目标与评定

目标 1

(5.1节, 5.2节)

- 能根据具体问题中的大小关系了解不等式的意义.
- 会用数轴表示“ $x > a$ ”“ $x \leq a$ ”“ $b < x < a$ ”这类简单不等式.
- 会用不等式的基本性质进行简单的不等式变形.

1. 选用适当的不等号填空:

- (1) $-\sqrt{10}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $-\pi$; (2) $-x^2$ $\underline{\hspace{1cm}}$ 0 ;
 (3) $m-7$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $m+6$; (4) $(m+1)^2$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $-2(m+1)^2$.

2. 用不等式表示:

- (1) 0 大于 -3;
 (2) x 减去 y 不大于 -4;
 (3) a 的 -2 倍与 -1 的和是非负数;
 (4) a 的 $\frac{1}{2}$ 与 b 的平方的和为正数.

3. 按照下列条件, 根据不等式的基本性质, 写出仍能成立的不等式:

- (1) $x-y > 1$, 两边同加上 y ;
 (2) $-\frac{1}{6}a-1 > \frac{1}{2}b$, 两边同乘 -6;
 (3) $-0.4 > -0.8$, 两边同除以 -0.4;
 (4) $6x-3 > 1-x$, 两边同加上 $x+3$, 再同除以 7.

4. 在数轴上表示下列不等式:

- (1) $x < 5$; (2) $x \geq -3$; (3) $-5 < x \leq 1$.

目标 2

(5.3节, 5.4节)

- 会解简单的一元一次不等式, 并能在数轴上表示出解.
- 会解由两个一元一次不等式组成的不等式组, 并会用数轴确定解.

5. 解下列一元一次不等式, 并把解在数轴上表示出来:

- (1) $7-2x > 6$; (2) $5x+3 < 3(2+x)$;
 (3) $\frac{1}{3}(2x-1) \geq \frac{3}{5}x$; (4) $\frac{x+1}{2} \leq \frac{2-x}{6}+1$.

6. 解下列一元一次不等式组, 并把解在数轴上表示出来:

- (1) $\begin{cases} 2x+4 < 0, \\ 1-2x > 0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \frac{3x+14}{4} > 2x-9, \\ 4x+6 \geq 3x+7. \end{cases}$

7. 求适合不等式组 $\begin{cases} 2x+1 < 3x+3, \\ \frac{2}{3}(x-1) \leq \frac{1}{2}(x+\frac{1}{3}) \end{cases}$ 的 x 的整数值.

目标 3

(5.3节, 5.4节)

- 能根据具体问题中的数量关系, 列出一元一次不等式或一元一次不等式组, 解决简单的应用问题.

8. 两根木棒的长分别是 5 cm 和 7 cm. 要选择第三根木棒, 将它们首尾相接钉成一个三角形. 如果第三根木棒的长为偶数, 则第三根木棒长的取值情况有几种?

9. 某班有 48 名同学, 每人都会下象棋或围棋, 其中会下象棋的人数比会下围棋人数的 2 倍少 3 人, 两种棋都会下的至多 9 人, 但不少于 5 人, 问会下围棋的有多少人?

10. 某业主贷款 2.2 万元购进一台机器, 生产某种产品. 已知产品的成本是 5 元/个, 售价是 8 元/个, 应付的税款和其他费用是售价的 10%. 若每个月能生产销售 2 000 个产品, 问至少几个月后能赚回这台机器款?

11. 从货轮上卸下若干只箱子, 其总质量为 10 吨, 每只箱子的质量不超过 0.9 吨, 且不小于 0.8 吨. 若要把这些箱子一次运走, 问需要多少辆载重 3 吨的汽车 (不考虑箱子的体积)?



如果给你一张入场券,根据入场券的排号和座号,你能确定你应该入座的位置吗?

人们在生活、生产实践中经常需要确定物体的位置.利用有序实数对来确定位置是最常用的方法之一,用有序实数对表示平面上点的位置就是平面直角坐标系的基本思想.

本章将探索确定物体位置的方法,学习平面直角坐标系和在坐标平面上的图形变换.



CONTENTS

目录

| | |
|----------------|-----|
| 6.1 探索确定位置的方法 | 124 |
| 6.2 平面直角坐标系 | 129 |
| ● 阅读材料 笛卡尔 | 135 |
| 6.3 坐标平面内的图形变换 | 136 |
| ● 小结 | 144 |
| ● 目标与评定 | 145 |



6·1

探索确定位置的方法

TAIJIJIEJINGWEIZHIDEFANGFA

上海大剧院位于上海人民广场西北侧，建筑总面积为62 803平方米。它那独特的建筑造型，高科技的玻璃架构，美轮美奂的室内装饰，获得中外宾客的赞许。



生活中我们常常需要确定物体的位置，如棋盘上棋子的位置，影院里的座位，城市地图上车站、学校、医院、风景区的位置等。

- (1) 你在教室里的座位是怎样确定的？需要几个数据？
- (2) 你知道在生活中，确定物体的位置有哪些方法？

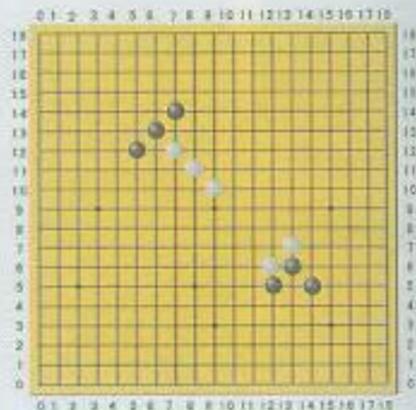
要确定物体在平面上的位置，一般有两种常用的方法。一种方法是用第几行、第几列来确定物体的位置，如影院、体育场等入场券上的“12排8座”“8排15座”等。为了使这种确定位置的方法更加简明，我们可以规定排号写在前面，座号写在后面，把它们记为有序数对(12, 8)，(8, 15)，那么每一个座位都对应着一个有序的数对，每一个这样的数对就能确定一个座位的位置。也就是说，可以用有序数对确定物体的位置。



做一做

ZUOYIZUO

1. 根据上面的规定，(6, 20)表示第几排第几座？(2, 18)与(18, 2)表示同一个座位吗？
2. 如图，请用有序数对表示图中各枚黑棋子的位置。



(第2题)

另一种方法是用方向和距离来确定物体的位置(或称方位)。例如，图6-1中，航标灯的位置可以由距小岛15 km和在小岛的南偏西60°方向这两个数据来确定，我们说航标灯在小岛的南偏西60°方向的15 km处。



图 6-1



做一做

ZUOYIZUO

如图 6-1。

- (1) 渔船 A 相对小岛的位置应怎样表述？
- (2) 小岛的南偏东 65°方向，距离小岛 35 km 处是什么？



合作学习

HEZUOXUEXI

图6-2是城市中某区域局部示意图，借助刻度尺、量角器，以2~4人为一组合作解决下面的问题：

城市局部示意图 比例尺:1:100 000

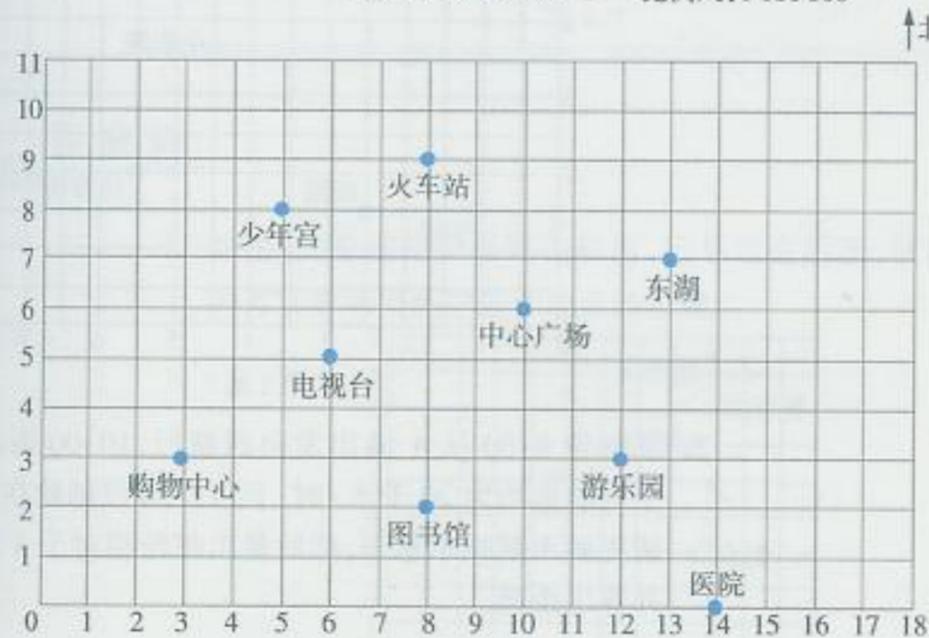


图 6-2

(1) 如果规定列号写在前面,行号写在后面,用数对的方法表示中心广场、少年宫、图书馆和火车站的位置;

(2) 购物中心位于中心广场的南偏西多少度的方向上?到中心广场的图上距离大约是多少厘米?实际距离是多少?

(3) 东湖位于中心广场的北偏东多少度的方向上?到中心广场的图上距离大约是多少厘米?实际距离是多少?

(4) 中心广场的南偏东约 34° 方向上,到中心广场的实际距离约4 000米处是什么地方?

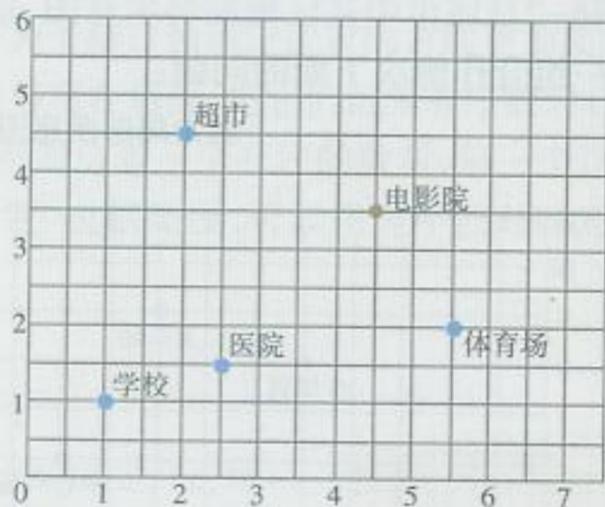


课内练习

KENEILIANXI

1. 城市中某区域如下面示意图,如果规定列号写在前面,行号写在后面,

- (1) 用数对的方法表示学校、体育场和超市的位置;
- (2) 数对 $(4.5, 3.5)$, $(2.5, 1.5)$ 在图上表示什么地方?



(第1题)

2. 某邮轮 8:00 从 A 港出发向西航行,10:00 折向北航行,平均航速均为 20 千米/时.问 11:30 该邮轮在什么位置?请先画出航线示意图,然后量出邮轮相对于 A 港的方位,并算出距离.

把一个地点的东经度写在前面,北纬度写在后面,并用括号括起来,就组成一对有序的数对,可以用来表示一个地点的位置.如杭州大致位于北纬 30° ,东经 120° (如图 6-3),记做 $(120, 30)$.

(1) 海口、北京的位置用东经和北纬的度数应怎样表示成有序数对?

(2) 据气象报告,2001 年第 8 号台风“桃芝”在当年 7 月 28 日下午 5 时,中心位于北纬 19.5° ,东经 124° ,请用数对的形式表示台风中心的位置,并在图上标出台风中心;

(3) $(120, 23.7)$, $(105, 30)$, $(110, 21.6)$ 各地点是否位于西北太平洋台风移动的主要路径上?

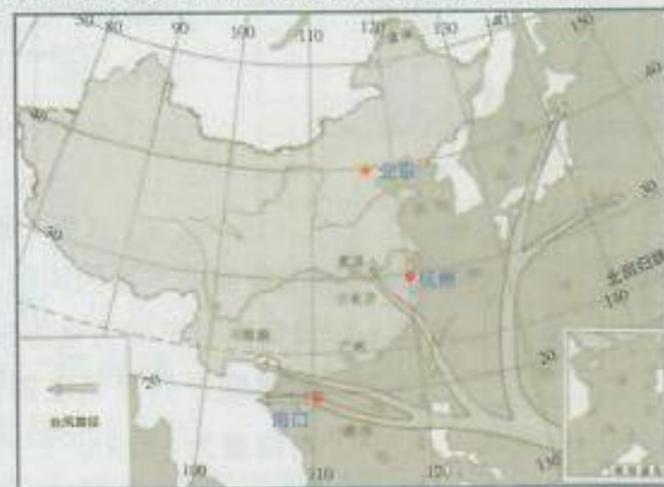
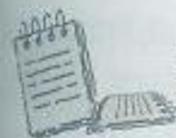


图 6-3



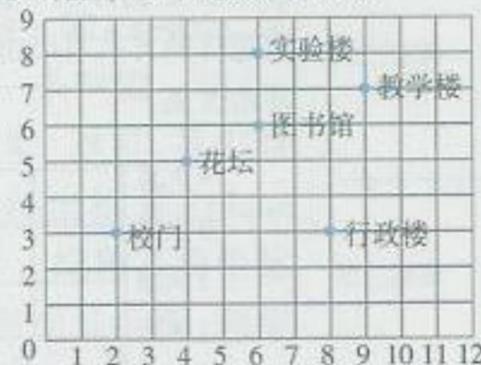
探究数学



作业题

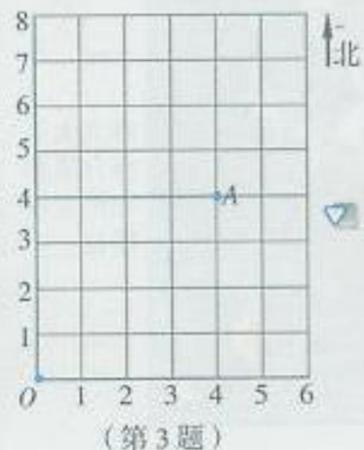
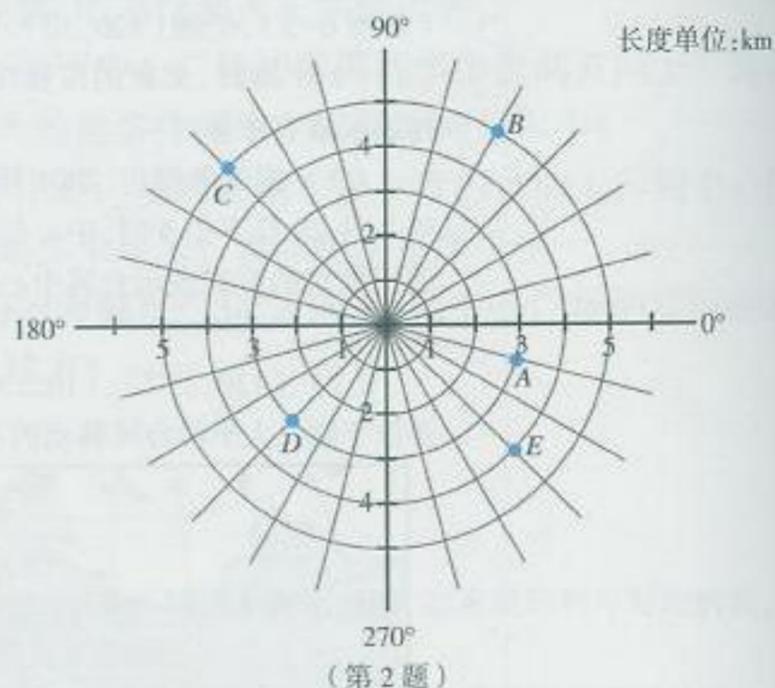
ZUOYETI

1. 如图,如果规定列号写在前面,行号写在后面,试用数对的方法表示出图中各个地点的位置.



(第1题)

2. 如图是雷达探测器在一次探测中发现的5个目标,试用适当的方法分别表示A,B,C,D,E这5个目标的位置.



3. 请根据图象回答下面的问题:

- 请用两种不同方法表示点A相对于点O的位置;
- 如果规定列号写在前面,行号写在后面,已知点B的位置为 $(3, 3\sqrt{3})$,画出点B的位置,并求点B到点O的距离,量出点B相对于点O的方位.

B组

4. 某地街道分布示意图如图,点A表示第1街和第4大道的十字路口,记为 $(1, 4)$,点B表示第6街与第2大道的十字路口,记为 $(6, 2)$.我们可以用 $(1, 4) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (4, 3) \rightarrow (4, 2) \rightarrow (5, 2) \rightarrow (6, 2)$ 来表示由A到B的一条路径,请在图上画出这条路径.你能用同样的方式写出由A到B的其他几条路径吗?请至少写出3条.



6.2

平面直角坐标系

HEZUOXUEXI

围棋在我国春秋、战国时期已经广为流行,从黑白两种“符号”的排列组合,演绎出一系列变幻莫测的境地.



图6-4是某市旅游景点示意图.如果把“人民广场”的位置作为起始点,记为 $(0, 0)$,分别记向北为正,向东为正.

(1) “镇海楼”的位置在“人民广场”东多少格,北多少格?用有序数对表示“镇海楼”的位置. “玉泉”的位置在“人民广场”西多少格,南多少格?用有序数对表示“玉泉”的位置;

(2) “灵石塔”的位置在“人民广场”西多少格,北多少格?怎样用有序数对表示“灵石塔”的位置?

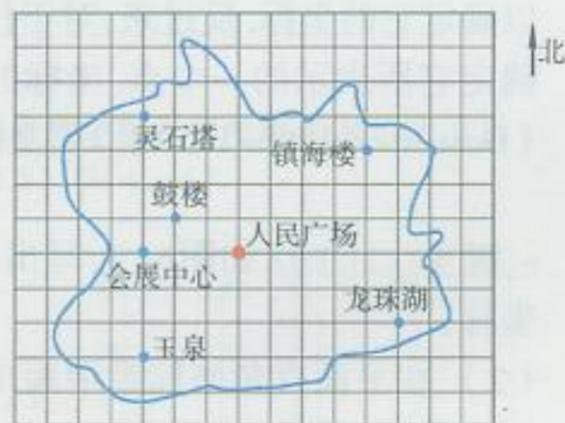


图6-4

在数学上,我们可以用如下的方法来表示平面上点的位置.如图6-5,在平面内画两条互相垂直,并且有公共原点O的数轴,其中一条叫做x轴(x-axis,又叫横轴),通常画成水平,另一条叫做y轴(y-axis,又叫纵轴),通常画成铅垂.这样,我们就说在平面上建立了平面直角坐标系(plane rectangular coordinate system),简称直角坐标系.坐标系所在的平面就叫做坐标平面,两坐标轴的公共原点O叫做该直角坐标系的原点.

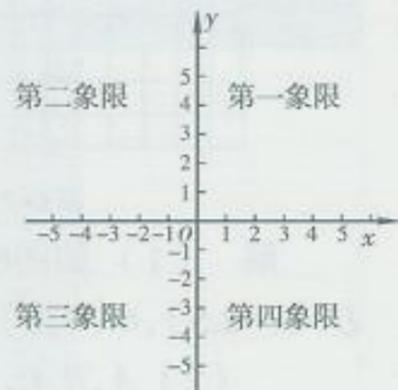


图6-5

x 轴和 y 轴把坐标平面分成四个象限(quadrant),如图6-5.象限以数轴为界, x 轴, y 轴上的点不属于任何象限.

对于平面内任意一点 M (图6-6),作 $MM_1 \perp x$ 轴, $MM_2 \perp y$ 轴,设垂足 M_1, M_2 在各自数轴上所表示的数分别为 x, y ,则 x 叫做点 M 的横坐标(abscissa), y 叫做点 M 的纵坐标(ordinate),有序实数对 (x, y) 叫做点 M 的坐标(coordinate).

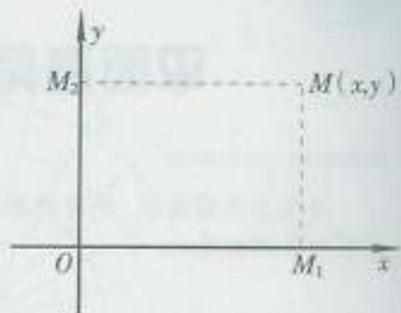


图6-6

建立了平面直角坐标系后,对于坐标平面内的任何一点,我们可以确定它的坐标.反过来,对于任何一个坐标,我们可以在坐标平面上确定它所表示的一个点.坐标的思想是法国数学家和哲学家笛卡尔(Descartes, 1596~1650年)创立的.

- 例1** (1) 如图6-7,写出平面直角坐标系中点 M, N, L, O, P 的坐标;
 (2) 在平面直角坐标系中画出点 $A(2, 4), B(5, 2), C(-3.5, 0), D(-3.5, -2)$.

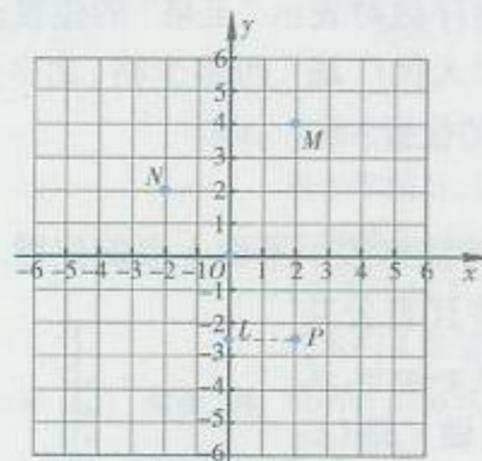


图6-7

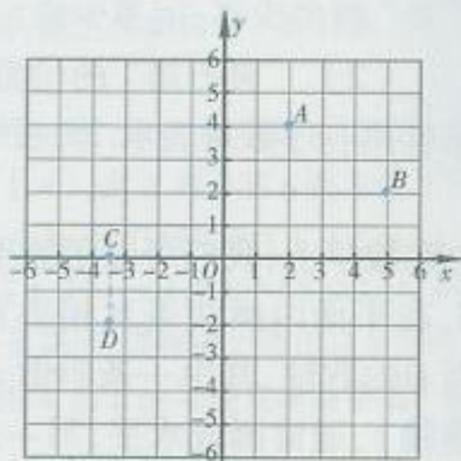


图6-8

解 (1) 如图6-7,所求各点的坐标为: $M(2, 4), N(-2, 2), L(0, -2.5), O(0, 0), P(2, -2.5)$.

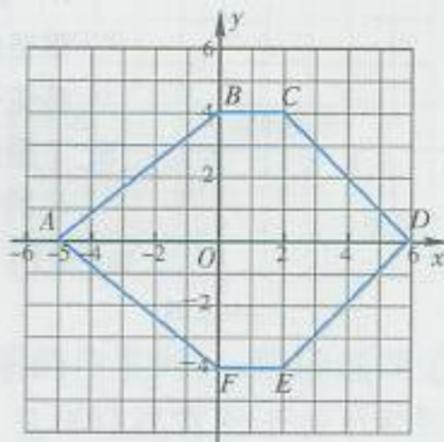
(2) A, B, C, D 各点的位置如图6-8.



课内练习
KENEILIANXI

如右图.

(1) 写出图中六边形各个顶点的坐标;它们各在什么象限内或坐标轴上?哪些点的横坐标相同?哪些点的纵坐标相同?

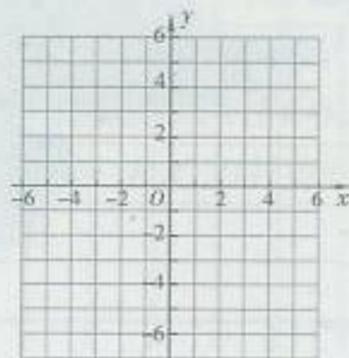


(2) 作出点 $(-2, \sqrt{2})$.

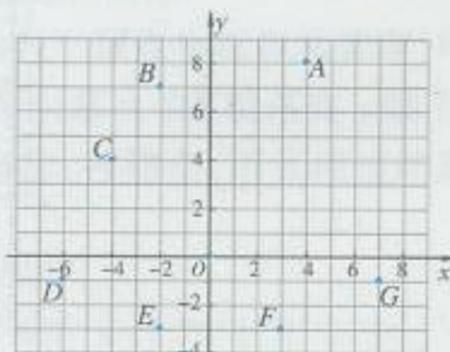


作业题
ZUOYETI

- 4组** 1. 在如图所示的平面直角坐标系中画出点 $M(-1, 0), N(2, 2), P(1.5, -1.5), Q(4, -4)$.

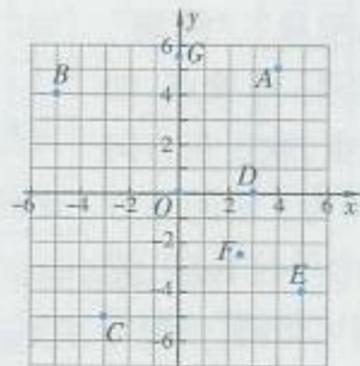


(第1题)



(第2题)

2. 指出图中点 A, B, C, D, E, F, G 分别在哪个象限内,并写出各点的坐标.
 3. 根据图中各点的位置填写下表:

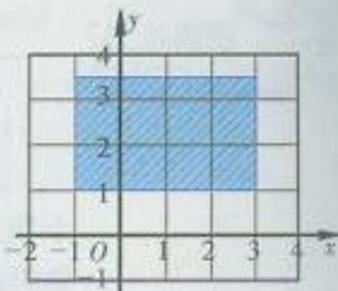


(第3题)

| 点 | 坐标 | 所在象限或坐标轴 |
|---|----|----------|
| A | | |
| B | | |
| C | | |
| D | | |
| E | | |
| F | | |
| G | | |
| O | | |

B组 4. 已知点 $A(2,15), B(\sqrt{5}, 3),$

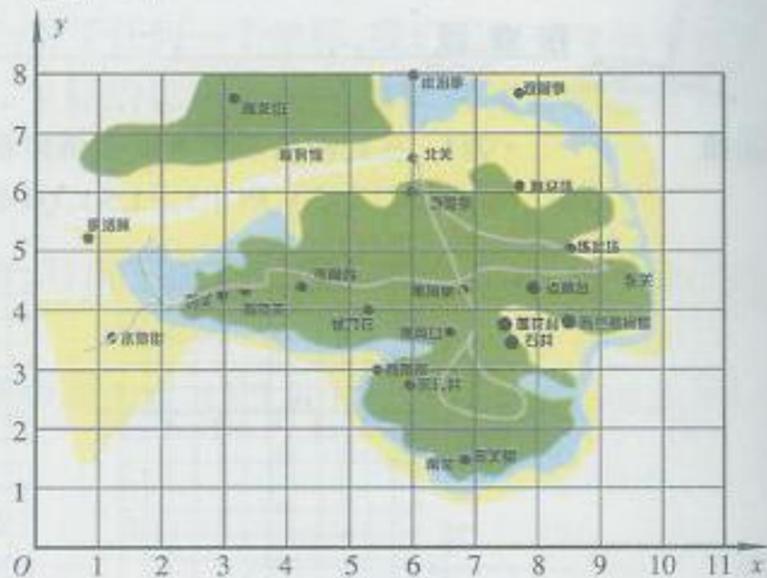
$C(-5,2), D(-0.5, \sqrt{7})$. 判断
这些点中, 哪些在阴影区域内,
哪些不在阴影区域内?



(第4题)

5. 下图是画在方格纸上的我国著名
的水泊梁山的旅游景点简图.

- (1) 分别写出“忠义堂”“黑
风亭”“快活林”“练武场”的坐标(精确到0.1);
(2) $(6,8), (6.6, 3.6), (7.9, 4.4)$ 所代表的地点分别
是什么?



(第5题)

2

132

例2 某公园中有“音乐喷泉”“绣湖”
“游乐场”“蜡像馆”“蝴蝶园”等景点, 如
图6-9, 以“音乐喷泉”为原点, 取正东方向
为 x 轴的正方向, 取正北方向为 y 轴的正方
向, 一个方格的边长作为一个单位长度, 建
立直角坐标系. 分别写出图中“绣湖”“游
乐场”“蜡像馆”“蝴蝶园”的坐标.

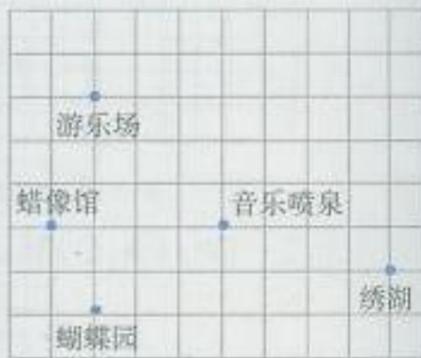


图6-9

解 以“音乐喷泉”为原点, 以过“蜡
像馆”“音乐喷泉”的直线为 x 轴, 过“音
乐喷泉”, 垂直于 x 轴的直线为 y 轴, 建立
直角坐标系(如图6-10). 则“绣湖”“游
乐场”“蜡像馆”“蝴蝶园”的坐标分别为
 $(4, -1), (-3, 3), (-4, 0), (-3, -2)$.

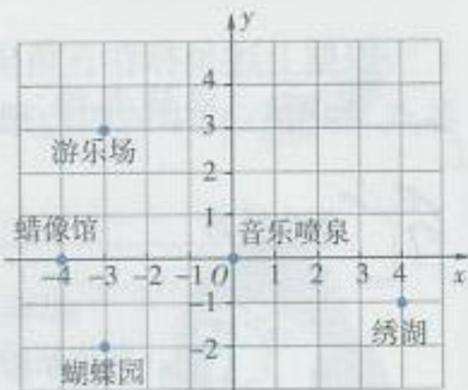


图6-10

在建立直角坐标系表示给定的点或图形的
位置时, 一般应选择适当的点作为原点, 适当
的距离为单位长度, 这样往往有助于表示和
解决有关问题.

例3 一个直四棱柱的俯视图如图6-11所示.
请建立适当的坐标系, 在直角坐标系中作出
俯视图, 并标出各顶点的坐标.

分析 为了使这个直四棱柱俯视图的各个
顶点坐标容易确定, 可以把点 E 作为坐标
的原点, 线段 AB 画在 x 轴上, 那么 DE 就
落在 y 轴上. 选择适当的比例, 求出 A, B, C, D
各点的坐标, 再描点, 用线段连结起来, 就
得到所求的图形.

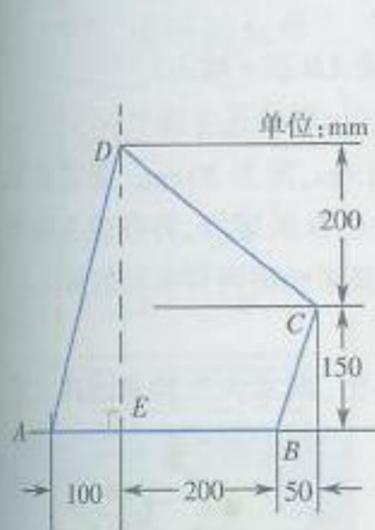


图6-11

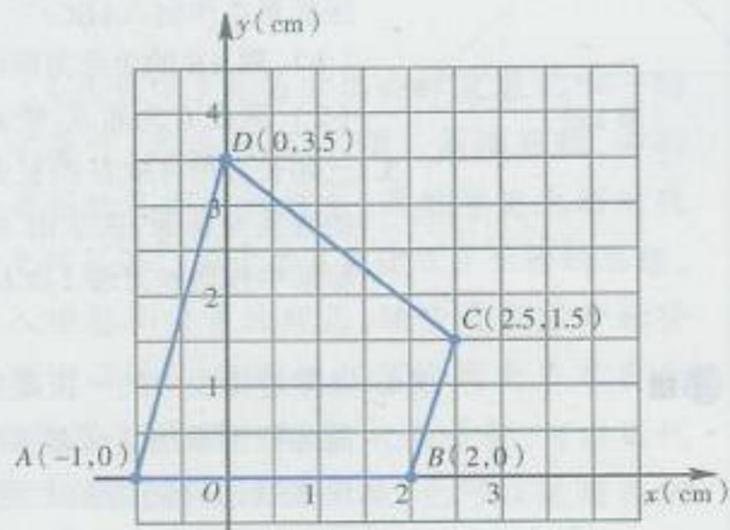


图6-12

解 建立直角坐标系如图6-12, 选择比例
为1:10. 取点 E 为直角坐标系的原点, 使
俯视图中的线段 AB 在 x 轴上, 则可得 A, B, C, D
各点的坐标分别为 $(-1, 0), (2, 0), (2.5, 1.5), (0, 3.5)$.

133

根据上述坐标在直角坐标系中作点 A, B, C, D , 并用线段依次连结各点. 如图6-12中的四边形就是所求作的俯视图.

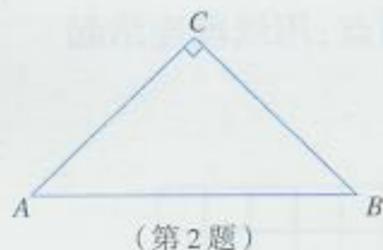
课内练习
KENEILIANXI

已知某镇的镇政府、镇中心小学、农技站的位置如图. 假如用线段连结这三个地点, 恰好形成一个正三角形, 且边长为 2 km. 试选取适当的比例, 建立直角坐标系, 并在坐标平面内画出这三个地点的位置, 并标出坐标.



作业题
ZUOYETI

A 组 1. 某风景区中古塔、飞瀑、笔峰、望夫石四个景点的位置依次在一个边长为 5 km 的正方形的四个顶点上. 试选取适当的比例, 建立适当的坐标系, 确立四个顶点的坐标, 并在直角坐标系中标出它们的位置.



2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=BC=2$ cm, $\angle C=Rt\angle$. 分别按下列条件建立直角坐标系, 并确定 $\triangle ABC$ 各顶点的坐标, 再在坐标系中作出 $\triangle ABC$:

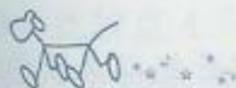
- (1) 取 AB 的中点为原点, 使 AB 在 x 轴上;
- (2) 取点 C 为原点, 使 AC 在 x 轴的正半轴上.

3. 已知长方形 $ABCD$ 的长为 30 mm, 宽为 20 mm. 建立适当的直角坐标系, 先求出 A, B, C, D 的坐标, 再在该直角坐标系中作出长方形 $ABCD$ (要求给出两种不同的解法).

B 组 4. 如图是传说中的一张藏宝岛图, 藏宝人生前通过建立直角坐标系画出这幅藏宝图. 现在我们只知道图上两块大石头的坐标为 $A(1, 2)$, $B(8, 9)$, 而藏宝地的坐标为 $(5, 7)$, 试设法在地图上找到宝藏, 并表示出来.



(第4题)



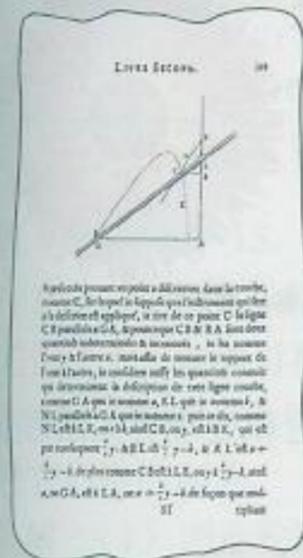
笛卡尔

笛卡尔, 1596年3月31日生于法国西部都兰郡的一个贵族家庭, 从小好奇心强, 勤奋好学, 自学了大量的数学、哲学方面的书籍, 这些积累成为他数学和哲学思想的主要来源. 笛卡尔毕业于法国巴黎普瓦捷大学, 获法律学位. 他毕业两年后, 不满足于书本知识, 决心走向



笛卡尔(1596~1650年)

社会, “去读世界这本大书”, 于是于1617年从军, 但他始终在专心思考着数学与哲学问题. 笛卡尔认为, 希腊人的综合几何只研究一些非常抽象, 而看起来无用的问题, 过于依赖图形, 束缚了人的想像力; 而对于当时流行的代数, 他认为过于强调法则和公式, 不能成为一门有利于增进智力的科学; 他对于三段论逻辑也有看法, 认为不产生任何新的结果. 因此笛卡尔提出, 应当把逻辑、几何、代数三者的优点结合起来, 丢弃它们各自的缺点, 从而建立一种“真正的数学”“普遍的数学”.



《几何学》书影

《几何学》是笛卡尔公开发表的唯一的数学著作, 总共只有117页. 篇幅虽短, 却标志着解析几何学的诞生, 是数学史上划时代的光辉巨著. 笛卡尔首先建立了坐标的思想, 引入坐标和变量的概念, 使变量数学开始登上历史舞台, 从而使数学的两大基本要素“数”与“形”统一起来. 也就是说, 可以用代数方法研究解决几何问题, 也可以运用几何方法来解代数问题, 对后来牛顿(Newton, 1642~1727年)、莱布尼茨(Leibniz, 1646~1716年)建立微积分理论起着关键性的作用, 为

当时科学的发展提供了数学的工具,推动了17世纪以来数学的大发展.

笛卡尔强调科学的应用,提出科学的目的在于“造福人群”,使人类成为自然界的“主人和统治者”.由于笛卡尔的学说与教义相悖,因此屡招教会迫害,他的著作被教会判处烧毁.笛卡尔离世时,由于教会的干预,给他送葬的只有几个友人,并不准为他致悼词,他的著作也被教会列入禁书目录.但是笛卡尔的哲学与数学思想影响日益深远,在他长眠地下17年后,法国政府将他的骨灰葬在法国伟人墓地——神圣巴黎保卫者和名人公墓,后又被安置在历史博物馆.他的墓碑上镌刻着:

笛卡尔,欧洲文艺复兴以来,第一个为人类争取并保证理性权利的人.

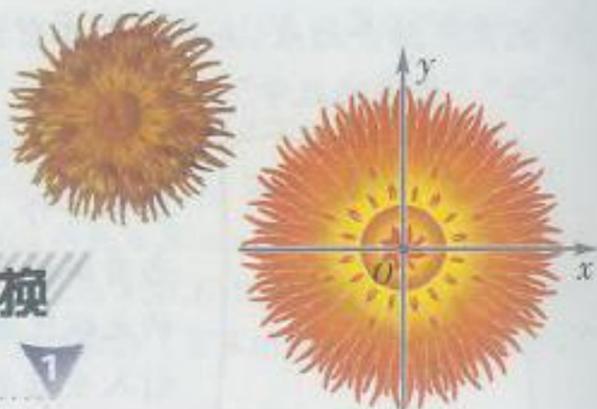


6.3

坐标平面内的图形变换

ZUODIAPINNEIMANDUOXINGTUOXINGBIANHUAN

在坐标平面内,将第一象限内的图案作怎样的对称变换,就得到海葵的图像?



运用直角坐标系,可以方便地帮助我们表达和处理有关图形变换的问题.先看下面的问题:

如图6-13.

- (1) 写出点 A 的坐标;
- (2) 分别作点 A 关于 x 轴, y 轴的对称点,并写出它的坐标;

(3) 比较点 A 与它关于 x 轴的对称点的坐标,点 A 与它关于 y 轴的对称点的坐标,你发现什么规律?

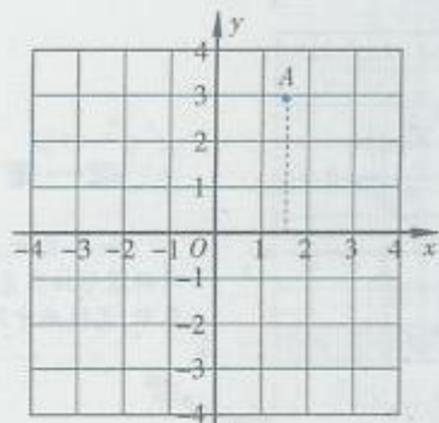


图 6-13

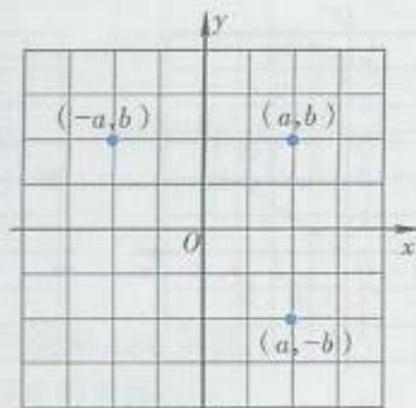


图 6-14

一般地,如图 6-14 所示:

在直角坐标系中,点 (a, b) 关于 x 轴的对称点的坐标为 $(a, -b)$, 关于 y 轴的对称点的坐标为 $(-a, b)$.



做一做

ZUOYIZUO

在直角坐标系中,已知点 $A(-1, 2)$, $B(1, -\sqrt{3})$, $C(0, 1.5)$, 则点 A 关于 x 轴的对称点是_____, 关于 y 轴的对称点是_____ ; 点 B 关于 y 轴的对称点是_____ ; 点 C 关于 x 轴的对称点是_____.

例 1 如图6-15.

(1) 求出图形轮廓线上各转折点 A, O, B, C, D, E, F 的坐标, 以及它们关于 y 轴的对称点的坐标 $A', O', B', C', D', E', F'$;

(2) 在同一坐标系中描点 $A', O', B', C', D', E', F'$, 并用线段依次将它们连结起来.

解 (1) 图形轮廓线上各转折点的坐标依次是 $A(0, -2), O(0, 0), B(3, 2), C(2, 2), D(2, 3), E(1, 3), F(0, 5)$. 它们关于 y 轴的对称点的坐标相应是 $A'(0, -2), O'(0, 0), B'(-3, 2), C'(-2, 2), D'(-2, 3)$.

$E'(-1,3), F'(0,5)$.

(2) 点 $A', O', B', C', D', E', F'$ 及其连线如图6-16.

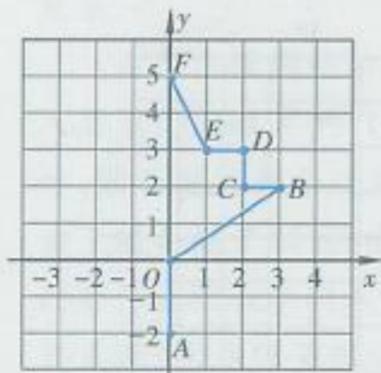


图6-15

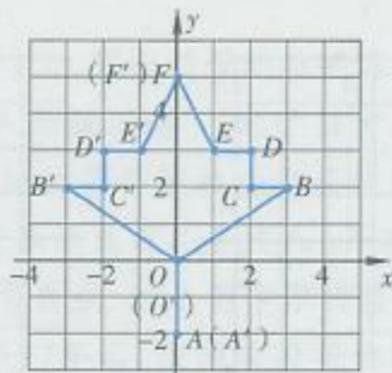


图6-16

想一想

如果要把一个轴对称图形画在直角坐标系中,怎样画才简便?



合作学习
HEZUOXUEXI

一个零件的主视图如图6-17. 请完成以下任务:

(1) 按你自己认为合适的比例, 选取合适的方格纸, 建立直角坐标系;

(2) 在直角坐标系中选取适当的位置, 作出这个主视图, 标明比例, 并求出轮廓线各个转折点的坐标;

(3) 与同伴作出的图形比较, 它们的形状相同吗? 大小呢? 你能用图形变换的观点加以说明吗?

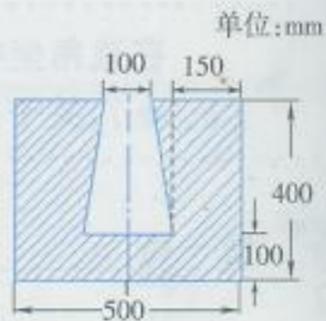


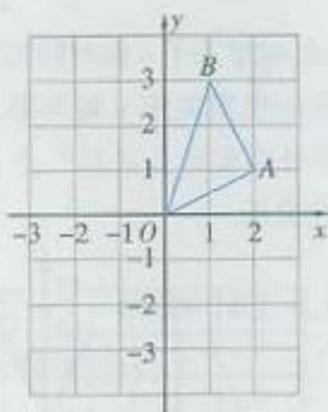
图6-17



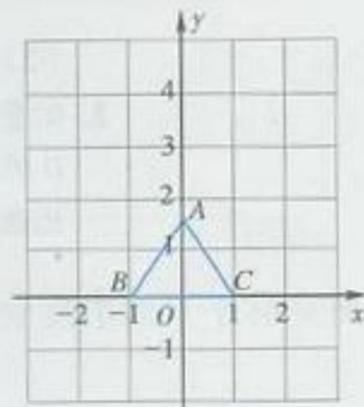
课内练习
KENEILIANXI

1. 如图.

- 求出 $\triangle ABO$ 各顶点的坐标, 以及它们关于 y 轴的对称点的坐标, 并描点;
- 将 $\triangle ABO$ 以 y 轴为对称轴作一次轴对称变换, 然后将所得的像连同原图形, 以 x 轴为对称轴再作一次轴对称变换, 分别作出经两次变换所得的像.



(第1题)



(第2题)

2. 已知直角坐标系中正三角形 ABC 如图.

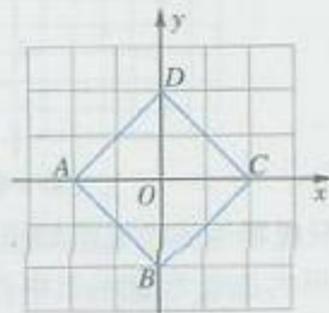
- 求出 $\triangle ABC$ 各顶点的坐标;
- 把 $\triangle ABC$ 的边长扩大到原来的2倍, 要求 B, C 的对应点仍在 x 轴上, 点 A 的对应点在 y 轴的正半轴上. 所得的像的顶点坐标与原图形的顶点坐标有什么关系? (与你的同伴交流)



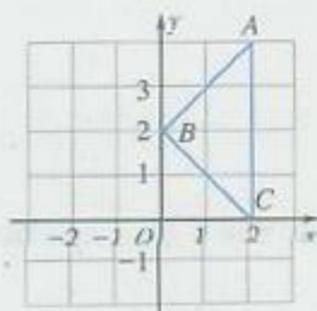
作业题
ZUOYETI

A组 1. 填空:

- 已知点 A 的坐标为 $(-3, 4)$, 则点 A 关于 x 轴的对称点 A' 的坐标为_____, 点 A 关于 y 轴的对称点 A'' 的坐标为_____;
- 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{2}$, 则四个顶点的坐标分别是_____.



(第1(2)题)



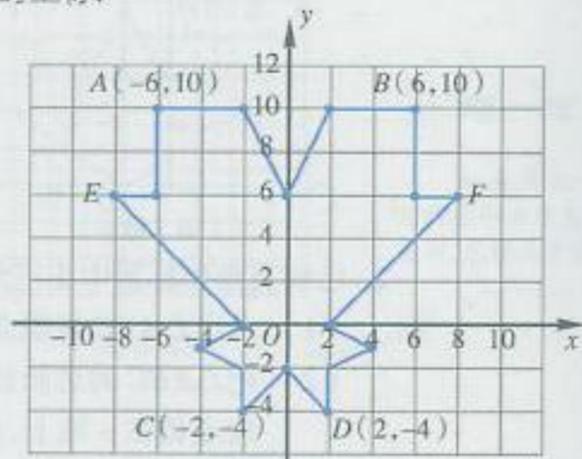
(第2题)

2. 已知 $\triangle ABC$ 在直角坐标系中的位置如图.

- 写出 A, B, C 各点的坐标, 以及它们关于 y 轴的对称点的坐标;

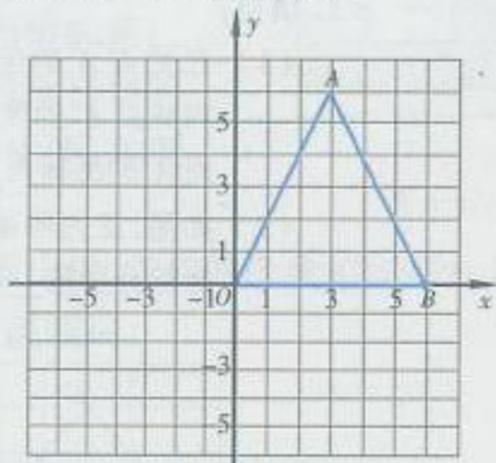
(2) 作 $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称的图形.

3. 如图所示的图案关于 y 轴对称. 图案上顶点 A 与 B , C 与 D 的坐标分别有什么关系? 点 E 的坐标是 $(-8, 6)$, 请写出点 F 的坐标.



(第3题)

- B组** 4. 如图, 将 $\triangle AOB$ 中各顶点的纵坐标、横坐标分别乘 -1 , 得到的图形与原图形相比有什么变化? 作出所得的图形. 这一过程可以看做是一个什么变换?



(第4题)

5. 一个机械零件的主视图如图, 其中正方形的边长为 30 cm , 中孔的圆心位于正方形的中心, 孔的直径为 20 cm . 选择合适的比例, 建立适当的直角坐标系, 并在直角坐标系中作出这个零件的主视图.



(第5题)



如图6-18, 将点 $A(-3, 3)$, $B(4, 5)$ 分别作以下平移变换, 作出相应的像, 并写出像的坐标:

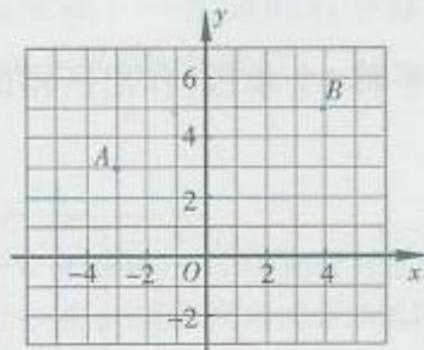


图6-18

- $A(-3, 3)$ $\xrightarrow{\text{向右平移5个单位}}$ $(2, 3)$
 $B(4, 5)$ $\xrightarrow{\text{向左平移5个单位}}$ (\quad, \quad)
 $A(-3, 3)$ $\xrightarrow{\text{向上平移3个单位}}$ (\quad, \quad)
 $B(4, 5)$ $\xrightarrow{\text{向下平移3个单位}}$ (\quad, \quad)

坐标变化

横坐标 纵坐标

加5 不变

比较各点平移时的坐标变化, 填在表格内. 总结点平移时坐标变化的规律.

做一做

ZUOYIZUO

- 已知点 A 的坐标为 $(-2, -3)$, 分别求点 A 经下列平移变换后所得的像的坐标:
 - 向上平移3个单位;
 - 向下平移3个单位;
 - 向左平移2个单位;
 - 向右平移4个单位.
- 已知点 A 的坐标为 (a, b) , 点 A 经怎样变换得到下列点?
 - $(a-2, b)$;
 - $(a, b+2)$.

例 2 如图6-19,在直角坐标系中,平行于 x 轴的线段 AB 上所有点的纵坐标都是 -1 ,横坐标 x 的取值范围是 $1 \leq x \leq 5$,则线段 AB 上任意一点的坐标可以用 “ $(x, -1) (1 \leq x \leq 5)$ ” 表示. 按照这样的规定,回答下面的问题:

(1) 怎样表示线段 CD 上任意一点的坐标?

(2) 把线段 AB 向上平移 2.5 个单位,作出所得的像. 像上任意一点的坐标怎样表示?

(3) 把线段 CD 向左平移 3 个单位,作出所得的像. 像上任意一点的坐标怎样表示?

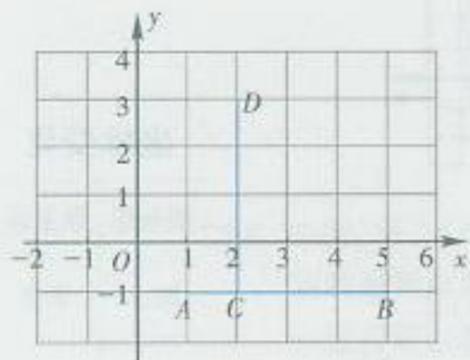


图 6-19

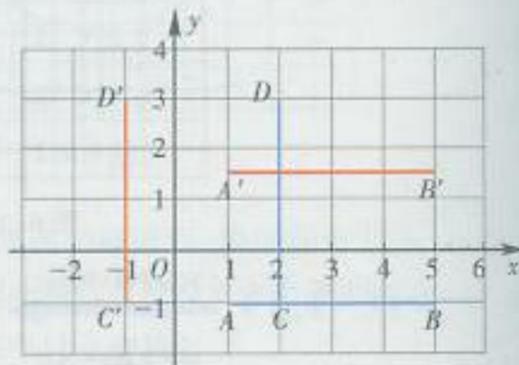


图 6-20

解 (1) 线段 CD 上任意一点的坐标可表示为 $(2, y) (-1 \leq y \leq 3)$.

(2) 所得的像为 $A'B'$ (如图6-20), 像上任意一点的坐标可表示为 $(x, 1.5) (1 \leq x \leq 5)$.

(3) 所得的像为 $C'D'$ (如图6-20), 像上任意一点的坐标可表示为 $(-1, y) (-1 \leq y \leq 3)$.

例 3 如图6-21.

(1) 分别求出点 A, A' 的坐标; 点 B, B' 的坐标, 并比较 A 与 A' , B 与 B' 之间的坐标变化;

(2) 从图甲到图乙可以看做经过怎样的图形变换?

解 (1) 点 A, A' 的坐标分

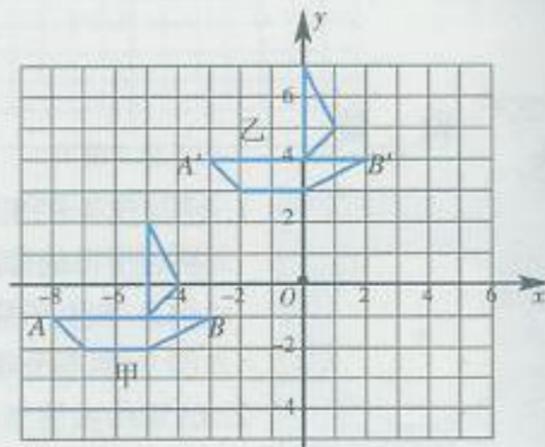


图 6-21

别为 $A(-8, -1), A'(-3, 4)$; 点 B, B' 的坐标分别为 $B(-3, -1), B'(2, 4)$. 由 A 到 A' , 横坐标增加 5 , 纵坐标增加 5 ; 由 B 到 B' , 横坐标增加 5 , 纵坐标增加 5 .

(2) 由第(1)题知, A, B 都向右平移 5 个单位, 向上平移 5 个单位. 从图甲到图乙, 图形的形状、大小都没有改变, 所以可以看做经过了两次平移变换: 一次是向右平移 5 个单位, 另一次是向上平移 5 个单位.

想一想
从图甲到图乙可以看做只经过一次平移变换吗? 请描述这个平移变换.

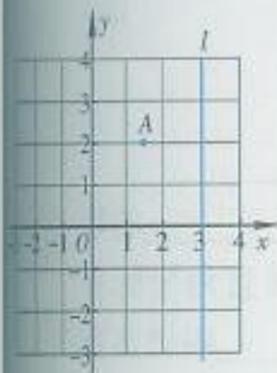
课内练习
KENEILIANXI

- 把点 $A(-1, 3)$ 先向右平移 3 个单位, 再向下平移 3 个单位, 求最后所得的像的坐标.
- 把图 6-21 中图甲平移, 使点 A 移至点 O , 求点 B 的对应点的坐标, 并画出图甲平移后的像.



作业题
ZUOYETI

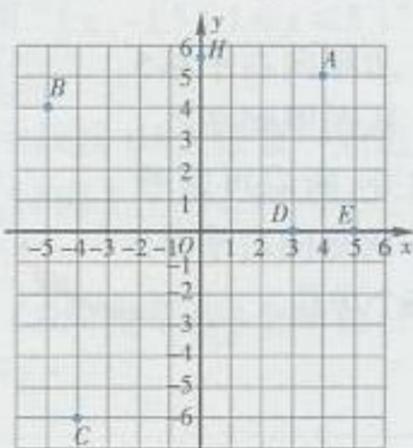
组 如图, 直角坐标系中点 A 的坐标是 $(1.5, 2)$. 把点 A , 已知直线 l 分别作下列变换, 请作出变换后的像 (只要求作出图形):



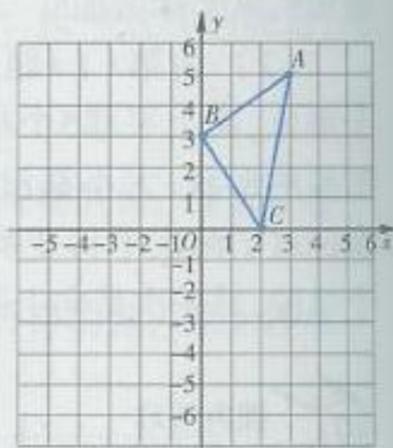
(第1题)

- 把点 A 向下平移 4 个单位;
 - 把点 A 向左平移 2.5 个单位;
 - 把直线 l 向左平移 4 个单位.
- (1) 把点 $P(-2, 7)$ 向左平移 2 个单位, 得点 _____;
 - (2) 把点 $P(-2, 7)$ 向下平移 7 个单位, 得点 _____;
 - (3) 把以 $(-2, 7), (-2, -2)$ 为端点的线段向右平移 7 个单位, 所得像上的任意一点的坐标可表示为 _____.
- 把点 $A(a, -3)$ 向左平移 3 个单位, 所得的像与点 A 关于 y 轴对称, 求 a 的值.

4. 如图,分别求一个变换或一组变换,使
- (1) 点 D 变换为点 E ;
 - (2) 点 A 变换为点 C ;
 - (3) 点 B 变换为点 D ;
 - (4) 点 $(-3, -4)$ 变换为 $(1, 0)$.



(第4题)



(第5题)

- B组** 5. 如图,把 $\triangle ABC$ 平移,使点 A 变换为点 O . 请作出 $\triangle ABC$ 平移后的像 $\triangle OB'C'$, 并求 $\triangle OB'C'$ 的顶点坐标和平移的距离.
6. 请说出一个图形变换,把点 (a, b) 变换为 $(a, -b)$.

小结

1. 常用的确定物体位置的方法有_____.
2. 在平面内画两条_____, 并且有_____的数轴, 这样就在平面上建立了平面直角坐标系. 平面直角坐标系所在的平面叫做_____, 两坐标轴的_____叫做该直角坐标系的原点.
3. 对于坐标平面内的任何一点, 我们都可以确定它的_____; 反过来, 对于任何一个坐标, 我们可以在坐标平面内确定_____.

它所表示的一个_____.

4. 在直角坐标系中, 点 (a, b) 关于 x 轴的对称点的坐标是_____, 关于 y 轴的对称点的坐标是_____.
5. 主要方法和技能
 - (1) 根据已知点的坐标在直角坐标系中描出点的位置, 求直角坐标系中已知点的坐标;
 - (2) 作直角坐标系, 在坐标系中用描点、连线的方法, 作出已知图形;
 - (3) 在直角坐标系中进行图形的轴对称变换;
 - (4) 在直角坐标系中进行图形的平移变换.

目标与评定

目标

(6.1节)

探索确定平面上物体位置的方法.

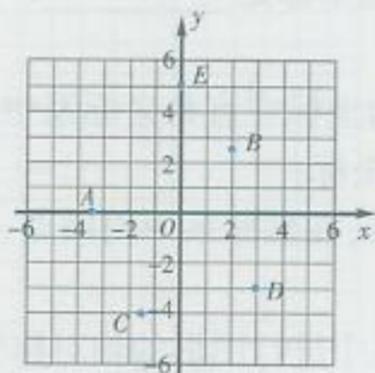
1. 若 B 地在 A 地的南偏东 30° 方向, 距离 A 地 30 km 处, 则 A 地在 B 地的_____方向, 距离 A 地_____处.
2. 双休日的一天, 小王、小李、小张、小叶、小陈和小丁 6 人去海滨度假, 他们在沙滩上的位置是(如图): 小王和小李为 $(34, G)$, 小张和小叶为 $(36, K)$, 小陈和小丁为 $(28, I)$. 请把他们在图上的位置找出来, 并注在图上.



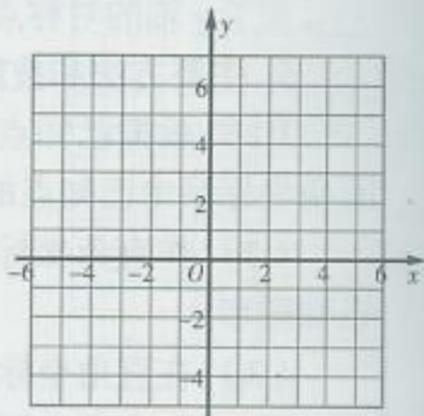
(第2题)

- 认识并能画出平面直角坐标系；在给定的直角坐标系中，会根据坐标描出点的位置、由点的位置写出它的坐标。
- 会用确定坐标、描点、连线的方法在直角坐标系中作出简单图形。

3. 写出直角坐标系中点 A, B, C, D, E (如图) 的坐标。



(第3题)



(第4题)

4. 在直角坐标系中描出下列各点，并指出它们所在的象限或坐标轴：

$$A(-3, 4), B(0, 3), C(-2, -1), D(3, -4), E\left(-\frac{5}{2}, 0\right),$$

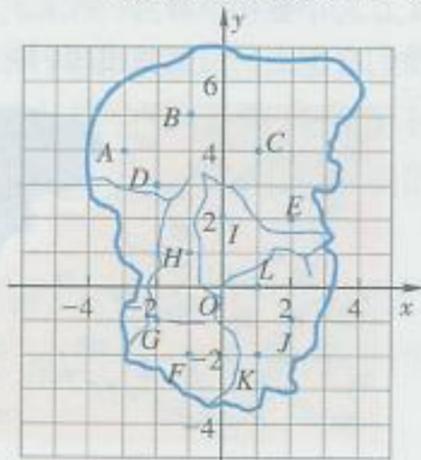
$$F(\pi, -1), G(0, 0), H(2, 0).$$

5. 已知矩形的两条边长分别为 4, 6. 建立适当的直角坐标系，使它的一个顶点的坐标为 $(-2, -3)$.

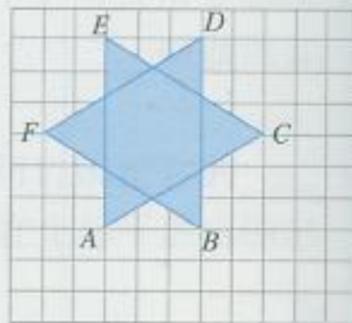
6. 某岛的旅游简图如图。

(1) 分别写出地点 A, B, C, D, E 的坐标；

(2) 坐标 $(-1, -2), (-2, -1), (1, -2), (2, -1)$ 所代表的地点分别是什么？



(第6题)



(第7题)

7. 在方格纸上建立适当的直角坐标系，并写出“六角形”6个角顶点的坐标。

- 在同一直角坐标系中，感受图形变换后点的坐标的变化。

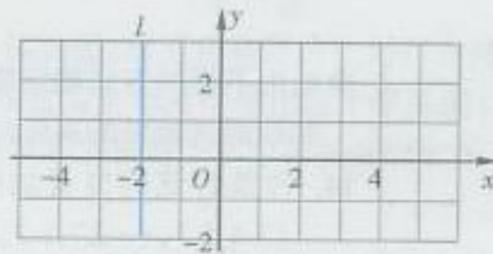
8. 填空：

(1) 点 $P(5, -3)$ 关于 x 轴对称的点的坐标是_____；

(2) 点 $P(3, -5)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是_____。

9. 点 A 的坐标是 $(1.5, 2)$. 点 A 向右平移 2 个单位后的坐标是_____，点 A 向下平移 3.5 个单位后的坐标是_____。

10. 如图，直线 l 上的点的什么坐标不变？若把直线 l 上任意一点的坐标记为 $(-2, y)$ ，则把它向右平移 5 个单位所得的像的坐标应怎样表示？请在直角坐标系中作出这个像。



(第10题)

11. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A, B, C 的坐标分别为 $A(0, -4), B(-4.5, 3), C(4.5, 5)$.

(1) 在直角坐标系中画出 $\triangle ABC$ ；

(2) 以 y 轴为对称轴，将 $\triangle ABC$ 作轴对称变换，作出变换后所得的像，并求出像的各个顶点的坐标。

12. 已知线段 AB 的两个端点 A, B 的坐标分别为 $(-2, 3), (1, 3)$.

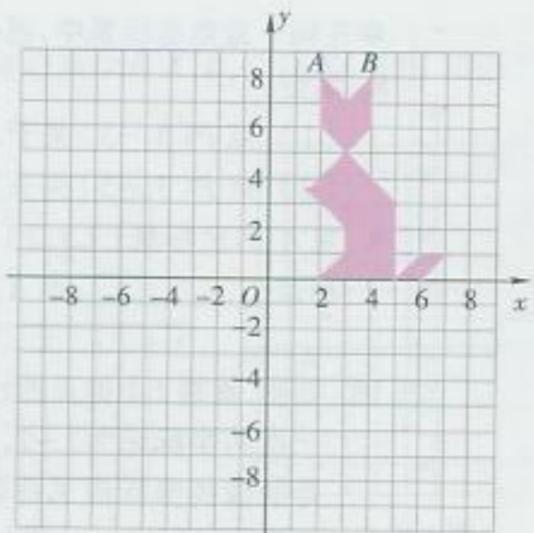
(1) 在直角坐标系中画出线段 AB ；

(2) 把线段 AB 向上平移 2 个单位，点 A 移至点 C ，点 B 移至点 D ，写出点 D 的坐标，并在直角坐标系中画出线段 CD ；

(3) 把线段 AB 先向下平移 5 个单位，再向右平移 3 个单位，得到线段 EF . 写出线段 EF 上任意一点的坐标。



13. 如图,请在这个直角坐标系中再画两只“猫”,使这两只“猫”分别与原来的图案关于 x 轴和 y 轴对称,并分别写出各“猫”耳尖位置的坐标.

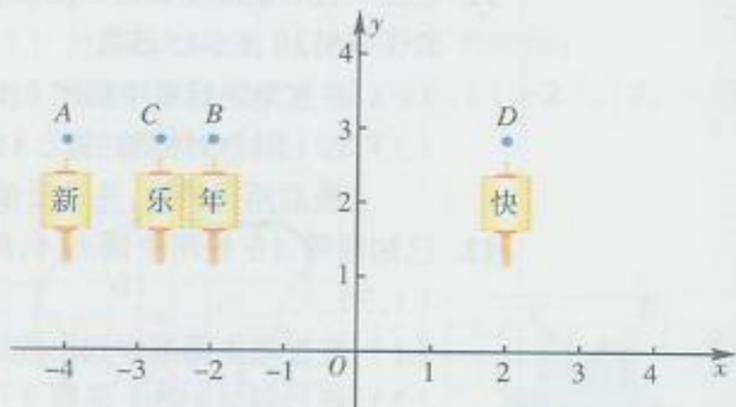


(第13题)

目标

●能用不同的方式确定物体的位置,综合运用图形与坐标的知识解决简单的实际问题.

14. 四盏灯笼的位置如图,已知 A, C, B, D 的坐标分别是 $(-4, b), (-2.7, b), (-2, b), (2, b)$,问应把哪一盏灯,作怎样的平移变换,使得 y 轴两边的灯笼对称?



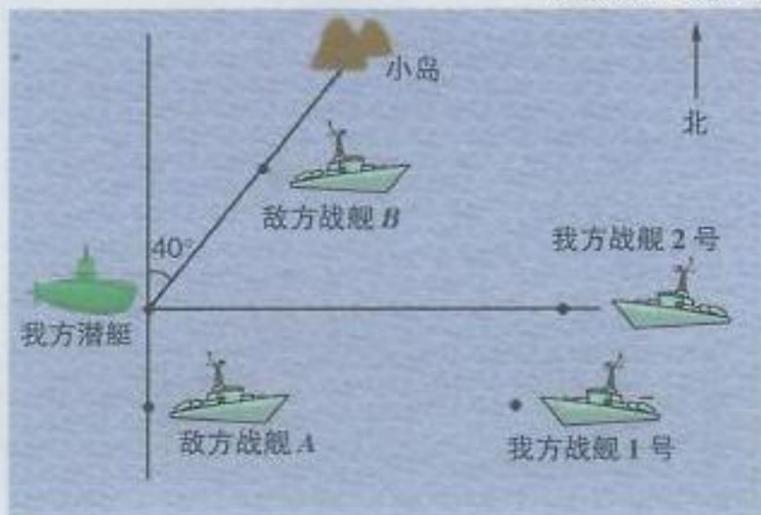
(第14题)

15. 某次军事演习中,如图为模拟敌我双方舰艇对峙图. 对于我方潜艇来说,
 (1) 北偏东 40° 方向上有哪些目标? 要想确定敌舰 B 的

位置,还需要什么数据? 这个数据能从图中取得吗?

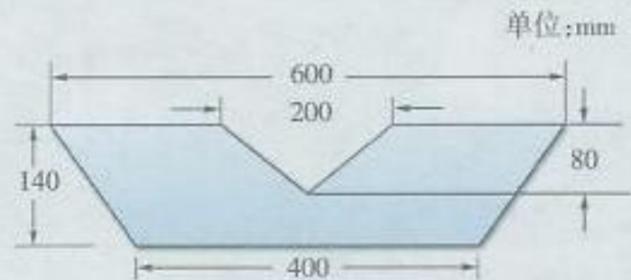
- (2) 相对我方潜艇,我方战舰1号在什么位置?
 (3) 你能用其他方式确定敌、我双方战舰的位置吗?

比例尺: 1:1 000 000



(第15题)

16. 一个零件图如图,请选择合适的比例和方格纸建立直角坐标系,在直角坐标系中画出这个零件图(只要求画出图形),并求出轮廓线上各个转折点的坐标.



(第16题)



函数是刻画客观世界的重要数学模型,它的应用十分广泛,比如物体运动的路程、速度和时间,购买商品的数量、单价和总价;一天中的气温和时间等.这些量与量之间的关系都可以用函数来描述,运用函数可帮助我们研究量的变化规律.

本章将学习常量、变量及函数的初步知识、一次函数及其图象.



CONTENTS

目录

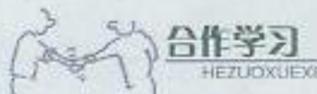
| | |
|-----------------|-----|
| 7.1 常量与变量 | 150 |
| 7.2 认识函数 | 153 |
| 7.3 一次函数 | 159 |
| 7.4 一次函数的图象 | 166 |
| 7.5 一次函数的简单应用 | 173 |
| ● 课题学习 怎样选择较优方案 | 181 |
| ● 小结 | 183 |
| ● 目标与评定 | 184 |



CHANGLIANGYUBIANLIANG

一辆长途客车从杭州驶向上海,全程哪些量不变?哪些量在变?

当我们用数学来分析现实世界的各种现象时,会遇到各种各样的量,如物体运动中的速度、时间和距离;圆的半径、周长和圆周率;购买商品的数量、单价和总价;某城市一天中各时刻变化着的气温;某段河道一天中时刻变化着的水位……在某一个过程中,有些量固定不变,有些量不断改变.



合作学习

HEZUOXUEXI

请讨论下面的问题:

1. 圆的面积公式为 $S = \pi r^2$, 请取 r 的一些不同的值, 算出相应的 S 的值:

$$r = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm} \longrightarrow S = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$$

$$r = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm} \longrightarrow S = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$$

$$r = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm} \longrightarrow S = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$$

$$r = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm} \longrightarrow S = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$$

.....

.....

在计算半径不同的圆的面积的过程中, 哪些量在改变, 哪些量不变?

2. 假设钟点工的工资标准为6元/时, 设工作时数为 t , 应得工资额为 m , 则

$$m = 6t.$$

取一些不同的 t 的值, 求出相应的 m 的值:

$$t = \underline{\hspace{2cm}} \longrightarrow m = \underline{\hspace{2cm}}$$

.....

.....

在根据不同的工作时数计算钟点工应得工资额的过程中, 哪些量在改变? 哪些量不变?

在一个过程中, 固定不变的量称为**常量**(constant), 如上面两题中, 圆周率 π 和钟点工的工资标准6元/时. 可以取不同数值的量称为**变量**(variable), 如上面两题中, 半径 r 和圆面积 S , 工作时数 t 和工资额 m 都是变量. 又如购买同一种商品时, 商品的单价就是常量, 购买的商品数量和相应的总价就是变量; 某段河道一天中各时刻变化着的水位也是变量.

例 先看下面报道:

美国“勇气号”火星车于北京时间2004年1月4日12时35分左右, 在火星表面成功着陆. 在着陆前的最后6分时间内, 它是在耐高温表层的保护下, 以1.9万千米/时的速度冲入130千米厚的火星大气层. 在空气阻力的作用下, 它在距火星表面8千米左右时, 时速降至1600千米/时, 此时直径10多米的降落伞自动打开.



登陆火星全过程

火星车着陆前的最后6分时间内, 火星车运动的时间、速度, 火星车着陆前6分时的位置到着陆点的距离, 火星车所受火星的引力这些量中, 哪些是变量? 哪些是常量?

解 在这6分时间内, 火星车运动的时间是变量; 火星车在空气阻力的作用下, 速度不断减小, 速度是变量. 火星车与火星越来越接近, 火星车所受火星的引力越来越大, 也是变量. 火星着陆前6分时的位置和着陆点都是空间中确定的两个位置, 两者之间的距离是一个确定的量, 所以是一个常量.

想一想

在上述过程中, 你还能说出哪些常量和变量?



课内练习

KENEILIANXI

1. 举两个常量和变量的实际例子.
2. 某水果店橘子的单价为2.5元/千克,记买 k 千克橘子的总价为 s 元.请说出其中的常量和变量.



作业题

ZUOYETI

- A组**
1. 圆周长 C 与圆的半径 r 之间有关系 $C=2\pi r$.对于各种不同大小的圆,请指出 $C=2\pi r$ 中的变量和常量.
 2. 声音在空气中传播的速度 v (m/s)与温度 t ($^{\circ}\text{C}$)之间有关系式 $v=331+0.6t$.说出其中的常量和变量.
 3. 设 A, B 两城市间的铁路路程为 s ,列车行驶的平均速度为 v ,驶完这段路所需的时间为 t (不包括中途停车的时间),则 $t=\frac{s}{v}$.其中哪些量是常量,哪些量是变量?如果 $v=140$ 千米/时呢?

- B组**
4. 判别下列问题中,字母表示的是变量还是常量:
 - (1) 某段河道某天的水位记录如下表,其中 t 表示时刻, h 表示水位(以警戒线为基准,高出警戒线为正):

| | | | | | | |
|---------|---|-----|-----|----|------|------|
| t (时) | 0 | 5 | 10 | 12 | 15 | 20 |
| h (米) | 1 | 0.8 | 0.4 | 0 | -0.2 | -0.4 |

 - (2) 寄一封平信的邮资为 p ,寄 x 封这种平信的总邮资为 y ,则 $y=px$.

- C组**
5. 请通过报刊、互联网等途径查找资料,写一段涉及较多量的短文,找出其中的变量和常量,并说明你的理由.

7.2

认识函数



1884650

根据经验,跳远的距离 $s=0.085v^2$ (v 是助跑的速度, $0 < v < 10.5$ 米/秒),其中变量 s 随着哪一个量的变化而变化?



合作学习

HEZUOXUEXI

1. 小明的哥哥是一名大学生,他利用暑假去一家公司打工,报酬按16元/时计算.设小明的哥哥这个月工作的时间为 t 时,应得报酬为 m 元,填写下表:

表7-1

| | | | | | | | | |
|--------------|---|---|----|----|----|-----|-----|-----|
| 工作时间 t (时) | 1 | 5 | 10 | 15 | 20 | ... | t | ... |
| 报酬 m (元) | | | | | | | | |

怎样用关于 t 的代数式来表示 m ?

2. 跳远运动员按一定的起跳姿势,其跳远的距离 s (米)与助跑的速度 v (米/秒)有关.根据经验,跳远的距离 $s=0.085v^2$ ($0 < v < 10.5$).

(1) 计算当 v 分别为7.5,8,8.5时,相应的跳远距离 s 是多少(结果保留3个有效数字)?

(2) 给定一个 v 的值,你能求出相应的 s 的值吗?

你能概括出上面各问题中两个变量(t 与 m, s 与 v)之间的关系共同点吗?

一般地,在某个变化过程中,设有两个变量 x, y ,如果对于 x 的每一个确定的值, y 都有唯一确定的值,那么就说 y 是 x 的函数(function),

x 叫做**自变量**(independent variable).

例如,上面的问题中, m 是 t 的函数, t 是自变量; s 是 v 的函数, v 是自变量.其中 $m=16t$, $s=0.085v^2$ 这两个函数用等式来表示,这种表示函数关系的等式,叫做**函数解析式**,简称**函数式**.用函数解析式表示函数的方法也叫**解析法**.

有时把自变量 x 的一系列值和函数 y 的对应值列成一个表,这种表示函数关系的方法是**列表法**.如表7-2表示的是一年内某城市月份与平均气温的函数关系.

表7-2

| | | | | | | | | | | | | |
|---------------------------------|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| 月份 m | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 平均气温 T ($^{\circ}\text{C}$) | 3.8 | 5.1 | 9.3 | 15.4 | 20.2 | 24.3 | 28.6 | 28.0 | 23.3 | 17.1 | 12.2 | 6.3 |

我们还可以用图象法来表示函数,例如图7-1中的图象就表示骑车时热量消耗 W (焦)与身体质量 x (千克)之间的函数关系.

解析法、图象法和列表法是函数的三种常用的表示方法.

对于函数 $m=16t$,当 $t=5$ 时,把它代入函数解析式,得

$$m=16t=16 \times 5=80 \text{ (元)}.$$

$m=80$ 叫做当自变量 $t=5$ 时的**函数值**.

若函数用解析法表示,只需把自变量的值代入函数式,就能得到相应的函数值.若函数用图象法表示,对给定的自变量的值,如 $x=50$,只要作一直线垂直于 x 轴,且垂足为点 $(50,0)$,这条直线与图象的交点 $P(50,399)$ 的纵坐标就是当 $x=50$ 时的函数值,即 $W=399$ (焦),如图7-1.若函数用列表法表示,函数值可以通过查表得到.

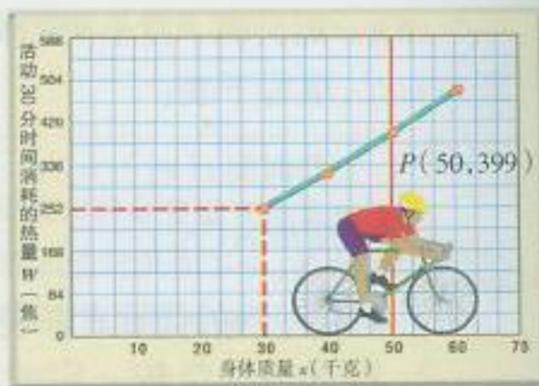


图7-1



课内练习

KENEILIANXI

- 某市民用水费的价格是1.2元/立方米,小红准备收取她所居住大楼各用户这个月的水费.设用水量为 n 立方米,应付水费为 m 元.在这个问题中, m 关于 n 的函数解析式是_____.当 $n=15$ 时,函数值是_____,这一函数值的实际意义是_____.
- 根据本节“合作学习”中第2题的函数关系式解答下面的问题:
 - 分别求当 $v=6$, $v=10$ 时的函数值,并说明它们的实际意义;
 - 当 $v=16$ 时,函数值有意义吗?为什么?



作业题

ZUOYETI

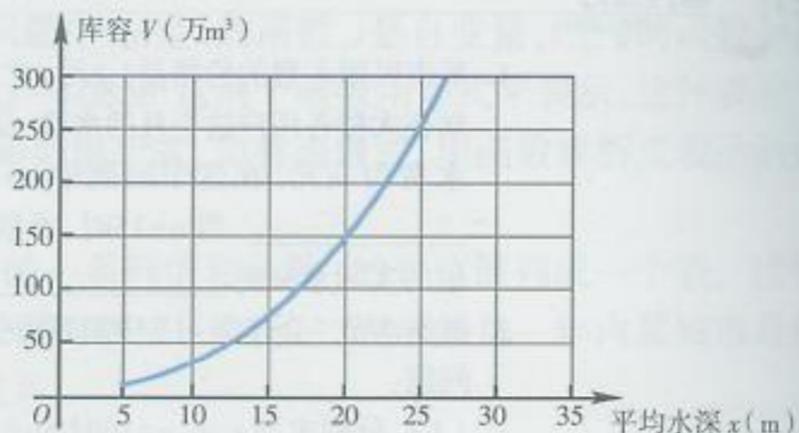
- A组**
- 某市民用电费的价格是0.53元/千瓦时.设用电量为 x 千瓦时,应付电费为 y 元,则 y 关于 x 的解析式是_____.当 $x=40$ 时,函数值是_____,它的实际意义是_____.若某用户的用电量为65千瓦时,则该用户应付电费为_____元.
 - 求下列函数当 $x=4$ 时的函数值:
 - $y=2x^2$;
 - $y=\sqrt{2x+1}$.
 - 观察你生活中所遇到或熟悉的某个变化过程是否存在函数关系,尝试用两个变量来描述.
- B组**
- 在国内投寄平信应付邮资如下表:

| | | | |
|--------------|-----------------|------------------|------------------|
| 信件质量 x (克) | $0 < x \leq 20$ | $20 < x \leq 40$ | $40 < x \leq 60$ |
| 邮资 y (元) | 0.80 | 1.60 | 2.40 |

 - y 是关于 x 的函数吗?为什么?
 - 分别求当 $x=5, 10, 30, 50$ 时的函数值,并说明它们的实际意义.
 - 下图是某水库的库容曲线图,其中 x 表示水库的平均水深(m), V 表示水库的库容(万m^3).根据图象回答下面



的问题:



(第5题)

(1) 这个函数反映了哪两个变量之间的关系?

(2) 填表:

| | | | | | |
|----------------|---|----|----|----|----|
| x (m) | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| V (万 m^3) | | | | | |

(3) 当平均水深取5 m至25 m之间的一个确定的值时, 相应的库容 V 确定吗?

(4) 库容 V 可以看成平均水深 x 的函数吗?

(5) 求当 $x=18$ 时的函数值, 并说明它的实际意义.

2

下面我们看两个求函数解析式及其应用的简单例子.

例 1 等腰三角形 ABC 的周长为 10, 底边 BC 长为 y , 腰 AB 长为 x , 求:

(1) y 关于 x 的函数解析式;

(2) 自变量 x 的取值范围;

(3) 腰长 $AB=3$ 时, 底边的长.

解 (1) 由三角形的周长为 10, 得 $2x+y=10$,

$\therefore y=10-2x$.

(2) $\because x, y$ 是三角形的边长,

$\therefore x > 0, y > 0, 2x > y$ (为什么?),

$$\therefore \begin{cases} 10-2x > 0, \\ 2x > 10-2x, \end{cases}$$

解得 $2.5 < x < 5$.

(3) 当 $AB=3$, 即 $x=3$ 时, $y=10-2 \times 3=4$.

\therefore 当腰长 $AB=3$ 时, 底边 BC 长为 4.

想一想

当 $x=6$ 时, $y=10-2x$ 的值是多少? 对本例有意义吗? 当 $x=2$ 呢?

例 2 游泳池应定期换水. 某游泳池在一次换水前存水 936 立方米, 换水时打开排水孔, 以每小时 312 立方米的速度将水放出. 设放水时间为 t 时, 游泳池内的存水量为 Q 立方米.



(1) 求 Q 关于 t 的函数解析式和自变量 t 的取值范围;

(2) 放水 2 时 20 分后, 游泳池内还剩水多少立方米?

(3) 放完游泳池内全部水需要多少时间?

解 (1) Q 关于 t 的函数解析式是 $Q=936-312t$.

$$\because Q \geq 0, t \geq 0, \therefore \begin{cases} t \geq 0, \\ 936-312t \geq 0, \end{cases}$$

解得 $0 \leq t \leq 3$, 即自变量 t 的取值范围是 $0 \leq t \leq 3$.

(2) 放水 2 时 20 分, 即 $t = \frac{7}{3}$.

把 $t = \frac{7}{3}$ 代入 $Q=936-312t$, 得

$$Q=936-312 \times \frac{7}{3}=208 \text{ (立方米)}.$$

\therefore 放水 2 时 20 分后, 游泳池内还剩水 208 立方米.

(3) 放完游泳池内全部水时, $Q=0$, 即 $936-312t=0$,

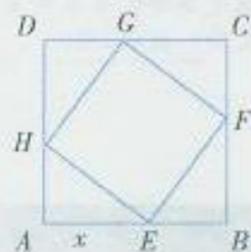
解得 $t=3$ (时).

\therefore 放完游泳池内全部水需 3 时.



课内练习

KENEILIANXI



(第2题)

1. 求下列函数自变量的取值范围(使函数式有意义):

(1) $y = \frac{1}{x-1}$;

(2) $y = x-1$.

2. 如图,正方形 $EFGH$ 内接于边长为1的正方形 $ABCD$. 设 $AE=x$, 试求正方形 $EFGH$ 的面积 y 与 x 的函数式, 写出自变量 x 的取值范围, 并求当 $AE = \frac{1}{4}$ 时, 正方形 $EFGH$ 的面积.

如图7-2, 每个图形都是由若干个棋子围成的正方形图案, 图案的每条边(包括两个顶点)上都有 n ($n \geq 2$) 个棋子, 设每个图案的棋子总数为 S .

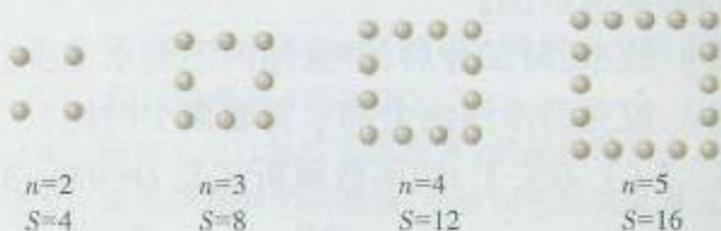
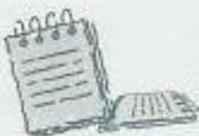


图7-2

图7-2中, 棋子的排列有什么规律? S 与 n 之间能用函数解析式表示吗? 自变量 n 的取值范围是什么?



作业题

ZUOYETI

A组 1. 根据函数解析式填表:

| | | | | | | | | |
|-----------------------|----|----|----|----|---|---|---|---|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y = x^2 - 1$ | | | | | | | | |
| $y = \frac{6}{x} + 1$ | | | | | | | | |

- 已知一个梯形的下底边长是上底边长的2倍, 高为10cm. 求梯形的面积 S (cm^2) 关于上底边长 x (cm) 的函数解析式.
- 如果 1 cm^3 钢的质量是 7.8 g , 求一个立方体钢块的质量 y (g) 与边长 x (cm) 之间的函数解析式.

- B组
- 设 y (cm^2) 表示周长比 12 (cm) 小 x (cm) 的正方形的面积, 求:
 - y 关于 x 的函数解析式和自变量 x 的取值范围;
 - 当 $x=8$ 时函数 y 的值.
 - 已知一条钢筋长 100 cm , 用它折弯成长方形(或正方形)框, 其一条边长记为 $x \text{ cm}$, 面积记为 $S \text{ cm}^2$.
 - 求 S 关于 x 的函数解析式和自变量 x 的取值范围;
 - 分别求当 $x=20, 25, 28$ 时, 函数 S 的值.



7.3

一次函数



YI C I HAN SHU

据估计, 过去几十年来, 全世界每年都有数百万公顷的土地变为沙漠, 土地的沙漠化给人类的生存带来严重的威胁. 我们可以通过建立函数模型来预测沙漠化趋势.

比较下列各函数, 它们有哪些共同特征?

$m=6t, y=-2x, y=2x+3, Q=-312t+936.$

一般地, 函数 $y=kx+b$ (k, b 都是常数, 且 $k \neq 0$) 叫做一次函数 (linear function). 当 $b=0$ 时, 一次函数 $y=kx+b$ 就成为 $y=kx$ (k 为常数, $k \neq 0$), 叫做正比例函数 (function of direct proportion), 常数 k 叫做比例系数 (constant of variation).



做一做

下列函数中,哪些是一次函数?哪些是正比例函数?系数 k 和常数项 b 的值各是多少?

$$C=2\pi r, y=\frac{2}{3}x+200, t=\frac{200}{v}, y=2(3-x), s=x(50-x).$$

例 1 求出下列各题中 x 与 y 之间的关系式,并判断 y 是否为 x 的一次函数,是否为正比例函数:

(1) 某农场种植玉米,每平方米种玉米6株,玉米株数 y 与种植面积 $x(\text{m}^2)$ 之间的关系;

(2) 正方形周长 x 与面积 y 之间的关系;

(3) 假定某种储蓄的月利率是0.16%,存入1 000元本金后,本息和 y (元)与所存月数 x 之间的关系.

解 (1) 因为每平方米种玉米6株,所以 x 平方米能种玉米 $6x$ 株,得 $y=6x$, y 是 x 的一次函数,也是正比例函数.

(2) 由正方形面积公式,得 $y=\left(\frac{x}{4}\right)^2$, y 不是 x 的一次函数,也不是正比例函数.

(3) 因为该种储蓄的月利率是0.16%,存 x 月所得的利息为 $0.16\%x \times 1\,000$,所以本息和 $y=1\,000+1.6x$, y 是 x 的一次函数,但不是 x 的正比例函数.

例 2 按国家1999年8月30日公布的有关个人所得税的规定,全月应纳税所得额^①不超过500元的税率为5%,超过500元至2 000元部分的税率为10%.

(1) 设全月应纳税所得额为 x 元,且 $500 < x \leq 2\,000$,应纳个人所得税为 y 元,求 y 关于 x 的函数解析式和自变量的取值范围;

^① 应纳税所得额是指月工资(薪金)中,扣除国家规定的免税部分800元后的剩余部分.

(2) 小明妈妈的工资为每月2 600元,小聪妈妈的工资为每月2 800元,问她俩每月应缴个人所得税多少元?

解 (1) $y=500 \times 5\% + (x-500) \times 10\%$
 $=0.1x-25 (500 < x \leq 2\,000).$

所求的函数解析式为 $y=0.1x-25$,自变量 x 的取值范围为 $500 < x \leq 2\,000$.

(2) 小明妈妈全月应纳税所得额为 $2\,600-800=1\,800$ (元).

将 $x=1\,800$ 代入函数解析式,得

$$y=0.1 \times 1\,800 - 25 = 155 \text{ (元)};$$

小聪妈妈全月应纳税所得额为 $2\,800-800=2\,000$ (元).

将 $x=2\,000$ 代入函数解析式,得

$$y=0.1 \times 2\,000 - 25 = 175 \text{ (元)}.$$

答:小明妈妈每月应缴个人所得税155元,小聪妈妈每月应缴个人所得税175元.



课内练习

KENEILIANXI

1. 已知正比例函数 $y=kx$. 当 $x=-2$ 时, $y=6$, 求比例系数 k 的值.

2. 2002年2月22日,中国银行公告一年期定期储蓄的年利率为1.98%,国家规定储蓄利息应付个人所得税的税率为20%. 设按一年期定期储蓄存入银行的本金为 x 元,到期支取时扣除个人所得税后实得本息和为 y 元.

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 把1 800元钱按一年期定期储蓄存入银行. 问到期支取时,扣除个人所得税后实得本息和为多少元?



作业题

ZUOYETI

A组 1. 写出下列各题中 x 与 y 之间的关系式,并判断 y 是否为 x 的一次函数,是否为正比例函数.

- (1) 三角形的底边长为 a (a 为常数), 其面积 y 和底边上的高 x 之间的关系;
- (2) 圆珠笔每支 0.6 元, 购买圆珠笔的总价 y (元) 与购买支数 x 之间的关系;
- (3) 甲、乙两地之间的距离为 300 千米, 汽车从甲地出发开往乙地的平均速度 y (千米/时) 和到达乙地所需时间 x (时) 之间的关系.

2. 分别写出下列一次函数的一次项系数 k 和常数项 b 的值:

- (1) $y=3x+7$; (2) $s=-t+4$;
(3) $m=0.4n$; (4) $y=-2(x-1)+x$.

3. 已知 y 是 x 的正比例函数, 当 $x=-2$ 时, $y=8$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 以及当 $x=3$ 时的函数值.

B 组

4. 一种移动通讯服务的收费标准为: 每月基本服务费 30 元, 每月免费通话时间为 120 分, 以后每分收费 0.4 元.

- (1) 写出每月话费 y 关于通话时间 x ($x > 120$) 的函数解析式;
- (2) 分别求每月通话时间为 100 分, 200 分的话费.

5. 某种气体在 0°C 时的体积为 100 L, 温度每升高 1°C , 它的体积增加 0.37 L.

- (1) 写出气体体积 V (L) 与温度 t ($^\circ\text{C}$) 之间的函数关系式;
- (2) 求当温度为 30°C 时气体的体积;
- (3) 当气体的体积为 107.4 L 时, 温度为多少摄氏度?

例 3 某地区从 1995 年底开始, 沙漠面积几乎每年以相同的速度增长. 据有关报道, 到 2001 年底, 该地区的沙漠面积已从 1998 年底的 100.6 万公顷扩展到 101.2 万公顷.

(1) 可选用什么数学方法来描述该地区的沙漠面积的变化?

(2) 如果该地区的沙漠化得不到治理, 那么到 2020 年底, 该地区的沙漠面积将增加到多少万公顷?

分析 由于沙漠面积每年几乎以相同的速度增长. 设 1995 年年底该地区沙漠的面积为 b 万公顷, 每经过一年, 沙漠面积增加 k 万公顷, 经过 x 年, 该地区的沙漠面积增加到 y 万公顷, 则 $y=kx+b$. 也就是说, 可选用一次函数来描述该地区沙漠面积的变化.

只要求出系数 k, b , 就求出了这个一次函数.

解 (1) 设从 1995 年年底该地区沙漠的面积为 b 万公顷, 经过 x 年沙漠面积增加 y 万公顷. 由题意, 得

$y=kx+b$, 且当 $x=3$ 时, $y=100.6$; 当 $x=6$ 时, $y=101.2$.

把这两对自变量和函数的对应值分别代入 $y=kx+b$, 得

$$\begin{cases} 100.6=3k+b, \\ 101.2=6k+b. \end{cases}$$

解这个方程组, 得 $\begin{cases} k=0.2, \\ b=100. \end{cases}$

这样该地区沙漠面积的变化就由一次函数 $y=0.2x+100$ 来进行描述.

(2) 把 $x=25$ 代入 $y=0.2x+100$, 得 $y=0.2 \times 25 + 100 = 105$ (万公顷).

可见, 如果该地区的沙漠化得不到治理, 那么到 2020 年底, 该地区的沙漠面积将增加到 105 万公顷.



做一做

ZUOYIZUO

1. 铜的质量 M 与体积 V 成正比例关系. 已知当 $V=5 \text{ cm}^3$ 时, $M=44.5 \text{ g}$, 求:

- (1) 铜的质量 M (g) 关于体积 V (cm^3) 的函数解析式, 并求铜的密度 ρ ;
- (2) 体积为 0.3 dm^3 的铜棒的质量.

2. 已知 y 是 x 的一次函数, 且当 $x=-2$ 时, $y=7$; 当 $x=3$ 时, $y=-5$. 求这个一次函数的解析式.

一般地,已知一次函数的自变量与函数的两对对应值,可以按以下步骤求这个一次函数的解析式:

1. 设所求的一次函数解析式为 $y=kx+b$, 其中 k, b 是待确定的常数.
2. 把两对已知的自变量与函数的对应值分别代入 $y=kx+b$, 得到关于 k, b 的二元一次方程组.
3. 解这个关于 k, b 的二元一次方程组, 求出 k, b 的值.
4. 把求得的 k, b 的值代入 $y=kx+b$, 就得到所求的一次函数解析式.



课内练习

KENEILIANXI

1. 已知 $y-100$ 与 x 成正比例关系, 且当 $x=10$ 时, $y=600$. 求 y 关于 x 的函数解析式.
2. 很多城市的出租车按里程收费: 在一定的里程内按定额收费(起步价), 超出规定里程部分按与超出里程成正比例收费. 某市出租车的起步价里程为 4 km , 起步价为 10 元(不计等待时间).

(1) 小明一次在该市乘车, 从计费表上看到乘车里程和车费分别为 6 km , 14.00 元, 请用函数解析式表示出租车超出起步价里程时的计费方法;

- (2) 如果你在该市乘坐出租车的里程为 3 km , 那么需付多少车费? 如果乘车里程为 8 km 呢?



作业题

ZUOYETI

- A 组**
1. 已知函数 $y=-2x+b$. 若当 $x=-\frac{1}{2}$ 时, $y=-1$, 求常数项 b .
 2. 已知 y 是 x 的一次函数, 且当 $x=-4$ 时, $y=9$; 当 $x=6$ 时, $y=-1$. 求:

(1) 这个一次函数的解析式和自变量 x 的取值范围;

(2) 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时, 函数 y 的值;

(3) 当 $y=7$ 时, 自变量 x 的值;

(4) 当 $y<1$ 时, 自变量 x 的取值范围.

3. 某饮料厂生产一种饮料, 经测算, 用 1 吨水生产的饮料所获利润 y (元) 是 1 吨水的买入价 x (元) 的一次函数. 根据下表提供的数据, 求 y 关于 x 的函数解析式. 当水价为每吨 10 元时, 1 吨水生产的饮料所获的利润是多少?

| | | |
|-------------|-----|-----|
| 1 吨水的买入价(元) | 4 | 6 |
| 利润 y (元) | 200 | 198 |

4. 一航空公司规定旅客可免费托运一定质量的行李, 超过规定质量的行李需买行李票, 行李票费用 y (元) 是行李质量 x (kg) 的一次函数. 已知当行李的质量分别为 20 kg , 40 kg 时, 需支付的行李票费用为 15 元和 45 元, 求 y 与 x 之间的函数解析式.

- B 组**
5. 已知 $y+m$ 与 $x-n$ 成正比例(其中 m, n 是常数).

(1) y 是关于 x 的一次函数吗?

(2) 如果当 $y=-15$ 时, $x=-1$; 当 $x=7$ 时, $y=1$, 求 y 关于 x 的函数解析式.

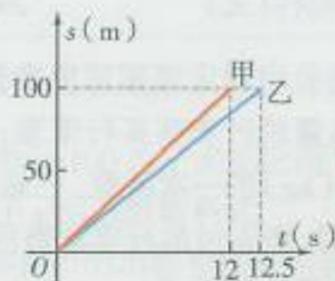
6. 杭甬铁路沿线主要城市之间的路程(千米)如图所示.



(第6题)



一次函数的图象



YEHANSHIHE-TIJIANGHE

根据甲、乙两人赛跑中路程 s 与时间 t 的函数图象,你能获取哪些信息?

把一个函数的自变量 x 与对应的函数 y 的值分别作为点的横坐标和纵坐标,在直角坐标系中描出它的对应点,所有这些点组成的图形叫做这个函数的**图象**(graph). 函数的图象是我们研究和处理有关函数问题的重要工具.



合作学习
HEZUOXUEXI

对一次函数 $y=2x$ 与 $y=2x+1$ 作如下研究:

1. 分别选择若干对自变量与函数的对应值,列成下表(请在空格内填入合适的数,完成表 7-3):

表 7-3

| | | | | | | | |
|----------|-----|----|----|---|---|---|-----|
| x | ... | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | ... |
| $y=2x$ | ... | -4 | -2 | 0 | | | ... |
| $y=2x+1$ | ... | -3 | | | | | ... |

2. 分别以表中 x 的值作点的横坐标,对应的 y 值作纵坐标,得到两组点,写出这两组点.
3. 画一个直角坐标系,并在直角坐标系中画出这两组点.
4. 观察所画的两组点,你发现了什么?把你的发现与同伴交流.

我们发现,坐标满足一次函数 $y=2x$ 的各点 $(-2,-4), (-1,-2), (0,0), (1,2), (2,4)$... 都在直线 l_1 上;而坐标满足一次函数 $y=2x+1$ 的各点: $(-2,-3), (-1,-1), (0,1), (1,3), (2,5)$... 都在直线 l_2 上(如图 7-3). 反过来,在直线 l_1 或 l_2 上取一些点,这些点的坐标分别满足 $y=2x$ 或 $y=2x+1$ (同学们不妨试一试).

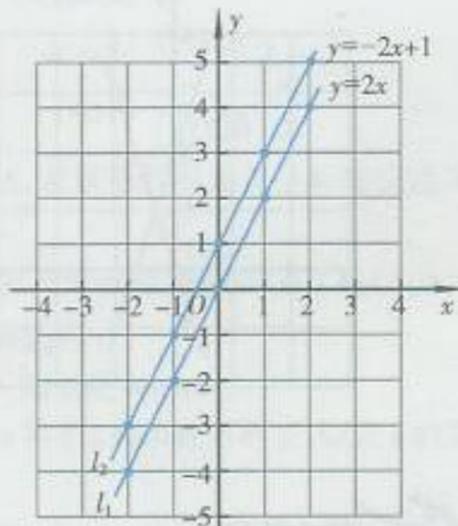


图 7-3

由此可见,一次函数 $y=kx+b$ (k, b 都为常数,且 $k \neq 0$) 可以用直角坐标系中的一条直线来表示,这条直线也叫做一次函数 $y=kx+b$ 的图象.

例 1 在同一直角坐标系中画出下列函数的图象,并求出它们与坐标轴交点的坐标.

$$y=3x, y=-3x+2.$$

分析 因为一次函数的图象是直线,根据两点确定一条直线,所以只要画出图象上的两个点,就能画出一一次函数的图象.

解 对函数 $y=3x$,

取 $x=0$, 得 $y=0$, 得到点 $(0,0)$;

取 $x=1$, 得 $y=3$, 得到点 $(1,3)$.

过点 $(0,0)$, $(1,3)$ 画直线, 就得到函数 $y=3x$ 的图象. 从图象可以看出, 它与坐标轴的交点是原点 $(0,0)$.

同理, 对函数 $y=-3x+2$,

取 $x=0$, 得 $y=2$, 得到点 $(0,2)$;

取 $x=1$, 得 $y=-1$, 得到点 $(1,-1)$.

过点 $(0,2)$, $(1,-1)$ 画直线, 就得到函数 $y=-3x+2$ 的图象, 如图 7-4.

从图象可以看出, 它与 x 轴的交点是 $(\frac{2}{3}, 0)$, 与 y 轴的交点是 $(0,2)$.

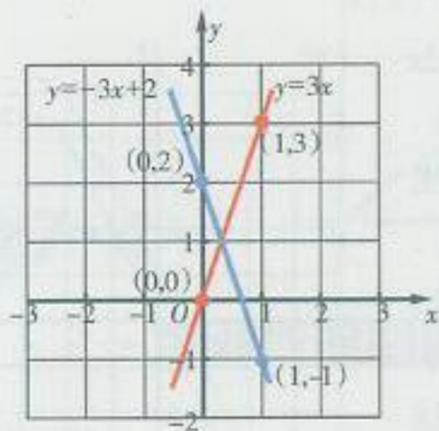


图 7-4

想一想

你能直接利用函数解析式求函数图象与坐标轴交点的坐标吗?

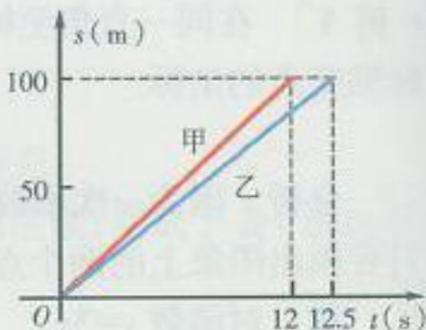


课内练习
KENEILIANXI

1. 在同一直角坐标系中画出下列函数的图象, 并标出它们与坐标轴的交点:

$$y = \frac{1}{2}x, \quad y = \frac{1}{2}x + 2, \quad y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

2. 甲、乙两人在一次赛跑中, 路程 s 与时间 t 的关系如图所示, 则这是一次几百米的赛跑? 甲、乙两人中谁先到达终点? 乙在这次赛跑中的速度是多少?



(第 2 题)



作业题
ZUOYETI

- A 组
- 函数 $y=2x+3$ 的图象是 ()
 - 过点 $(0,3)$, $(0, -\frac{3}{2})$ 的直线.
 - 过点 $(0, -\frac{3}{2})$, $(1,5)$ 的直线.
 - 过点 $(-\frac{3}{2}, 0)$, $(-1,1)$ 的直线.
 - 过点 $(0,3)$, $(\frac{3}{2}, 0)$ 的直线.
 - 在同一直角坐标系中画出下列直线:
 - $y=3x$;
 - $y=3x+5$;
 - $y=-3x$;
 - $y=-3x+\frac{5}{2}$.
 - 已知函数 $y=-8x+16$, 求该函数图象与坐标轴交点的坐标;
 - 已知一次函数的图象与坐标轴交于点 $(0,1)$, $(1,0)$, 求这个一次函数的解析式.
 - 一个矩形的周长是 12cm , 一边长是 $x\text{cm}$.
 - 求它的另一条边长 y 关于 x 的函数解析式, 以及 x 的取值范围;
 - 画出这个函数的图象.
- B 组
- 一次函数的图象过 $M(3,2)$, $N(-1,-6)$ 两点.
 - 求函数的解析式;
 - 画出该函数的图象;
 - 试判断点 $P(2a, 4a-4)$ 是否在函数的图象上, 并说明理由.
- C 组
- 在同一条道路上, 甲每时走 3km , 出发 0.15 时后, 乙以每时 4.5km 的速度追甲. 设乙行走的时间为 t 时.
 - 写出甲、乙两同学每人所走的路程 s 与时间 t 的关系;
 - 在同一直角坐标系中画出它们的图象;
 - 求出两条直线的交点坐标, 并说明它的实际意义.





利用函数的图象分析下列问题:
 对于一次函数 $y=2x+3$, 当自变量 x 的值增大时, 函数 y 的值有什么变化? 对于一次函数 $y=-2x+3$ 呢?
 观察图7-5中的各个一次函数的图象, 你发现了什么规律?

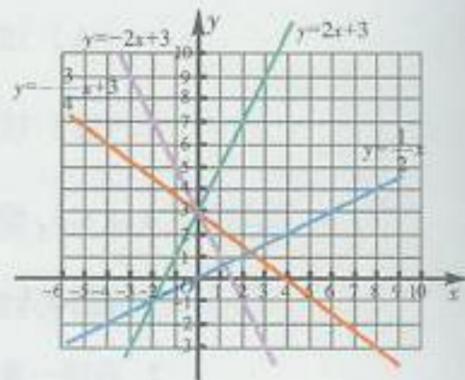


图7-5

一般地, 一次函数有下面的性质:

对于一次函数 $y=kx+b$ (k, b 为常数, 且 $k \neq 0$), 当 $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $k < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小.



设下列两个函数当 $x=x_1$ 时, $y=y_1$; 当 $x=x_2$ 时, $y=y_2$. 用“>”或“<”号填空.

对于函数 $y=\frac{1}{2}x$, 若 $x_2 > x_1$, 则 y_2 _____ y_1 ;

对于函数 $y=-\frac{3}{4}x+3$, 若 x_2 _____ x_1 , 则 $y_2 < y_1$.

例2 我国某地区现有人工造林面积12万公顷, 规划今后10年新增造林61 000~62 000公顷. 请估算6年后该地区的造林总面积达到多少万公顷.

解 设 p 表示今后10年平均每年造林的公顷数, 则 $6\ 100 \leq p \leq 6\ 200$. 设6年后该地区的造林总面积为 S 公顷, 则

$$S=6p+120\ 000.$$

这个一次函数中, 一次项系数 $k=6 > 0$, 所以 S 随 p 的增大而增大.

$$\therefore 6\ 100 \leq p \leq 6\ 200,$$

$$\therefore 6 \times 6\ 100 + 120\ 000 \leq S \leq 6 \times 6\ 200 + 120\ 000,$$

$$\text{即 } 156\ 600 \leq S \leq 157\ 200.$$

答: 6年后该地区的造林总面积达到15.66万~15.72万公顷.

例3 要从甲、乙两仓库向A、B两工地运送水泥. 已知甲仓库可运出100吨水泥, 乙仓库可运出80吨水泥; A工地需70吨水泥, B工地需110吨水泥. 两仓库到A、B两工地的路程和每吨每千米的运费如下表:

表7-4

| | 路程(千米) | | 运费(元/吨·千米) | |
|----|--------|-----|------------|-----|
| | 甲仓库 | 乙仓库 | 甲仓库 | 乙仓库 |
| A地 | 20 | 15 | 1.2 | 1.2 |
| B地 | 25 | 20 | 1 | 0.8 |

(1) 设甲仓库运往A地水泥 x 吨, 求总运费 y 关于 x 的函数解析式, 并画出图象;

(2) 当甲、乙两仓库各运往A、B两工地多少吨水泥时, 总运费最省? 最省的总运费是多少?

解 (1) 各仓库运出的水泥吨数和运费如下表:

表7-5

| | 运量(吨) | | 运费(元) | |
|----|---------|--------|------------------------------|-------------------------------|
| | 甲仓库 | 乙仓库 | 甲仓库 | 乙仓库 |
| A地 | x | $70-x$ | $1.2 \times 20x$ | $1.2 \times 15 \times (70-x)$ |
| B地 | $100-x$ | $10+x$ | $1 \times 25 \times (100-x)$ | $0.8 \times 20 \times (10+x)$ |

$$\begin{aligned} \therefore y &= 1.2 \times 20x + 1 \times 25 \times (100-x) \\ &+ 1.2 \times 15 \times (70-x) + 0.8 \times 20 \times (10+x) \\ &= -3x + 3\ 920. \end{aligned}$$

即所求的函数解析式为 $y=-3x+3\ 920$, 其中 $0 \leq x \leq 70$, 其图象如图7-6所示.

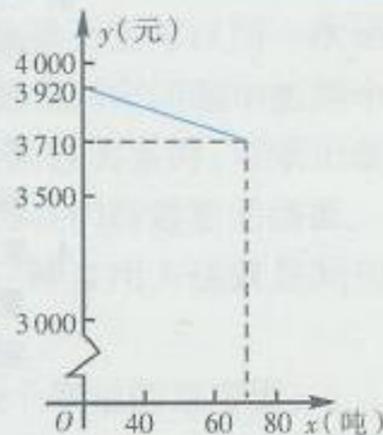


图7-6

图7-6中, 3 000 以下的刻度省略, 下同.

(2) 在一次函数 $y = -3x + 3920$ 中, $k = -3 < 0$, 所以 y 的值随 x 的增大而减小. 因为 $0 \leq x \leq 70$, 所以当 $x = 70$ 时, y 的值最小.

将 $x = 70$ 代入表 7-5 中的各式可知, 当甲仓库向 A, B 两工地各运送 70 吨和 30 吨, 乙仓库不向 A 工地运送水泥, 而只向 B 工地运送 80 吨时, 总运费最省. 最省的总运费为 $-3 \times 70 + 3920 = 3710$ (元).

想一想

你能从图 7-6 中直接观察得到结果吗?



的耗油量为 0.1 L/km.

(1) 求油箱中剩余的汽油量 Q (L) 关于加满油后已驶里程 d (km) 的函数解析式, 并画出它的图象, 根据图象确定自变量 d 的取值范围 (假定该汽车能工作至油量为零);

(2) 利用图象说明, 当已驶里程超过 425 km 后油箱内的汽油量.

6. 公路上依次有 A, B, C 三个车站 (如图). 上午 8 时, 甲骑自行车从 A, B 间离 A 站 18 千米的 P 处出发, 向 C 站匀速前进, 经过 15 分到达离 A 站 22 千米处. 已知 A, B 间和 B, C 间的距离分别是 30 千米和 20 千米, 问在哪个时间段, 甲在 B, C 两站之间 (不包括 B, C)?



(第 6 题)



课内练习

KENEILIANXI

- 对于函数 $y = -2x + 5$, 当 $-1 < x < 2$ 时, $\underline{\hspace{2cm}} < y < \underline{\hspace{2cm}}$.
- 为了清洗水箱, 需放掉水箱内原有的 200 升水. 若 8:00 打开放水龙头, 放水的速度为 2 升/分. 运用函数解析式和图象解答以下问题:
 - 估计 8:55~9:05 (包括 8:55 和 9:05) 水箱内剩多少升水;
 - 当水箱中存水少于 10 升时, 放水时间已经超过多少分?



作业题

ZUOYETI

A 组

1. 填空:

(1) 已知 $y = 2x + 7$. 当 $x_1 \leq x \leq x_2$ 时, $\underline{\hspace{2cm}} \leq y \leq \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 已知 $y = -0.5x + 2$. 当 $-3 < x < 3$ 时, $\underline{\hspace{2cm}} < y < \underline{\hspace{2cm}}$.

- 已知 y 是关于 x 的一次函数, 这个函数图象上有两点的坐标为 $(0, -8)$, $(1, 2)$, 求当 $-3 < y < 3$ 时 x 的取值范围.
- 已知某种商品的买入单价为 30 元, 售出价的 10% 用于缴税和其他费用. 若要使纯利润保持在买入价的 11%~20% 之间 (包括 11% 和 20%), 问怎样确定售出单价?
- 某一次函数的图象经过点 $(-1, 2)$, 且函数 y 的值随自变量 x 的增大而减小. 请写出一个符合条件的一次函数的解析式.

B 组

5. 一辆汽车加满油后, 油箱中有汽油 70 L, 汽车行驶时正常



7.5

一次函数的简单应用

YI CIGONGSHI DE JIAN DAN YING YONG

1



蓝鲸是现存动物中体形最大的一种, 体长的最高记录是 3 200 cm. 根据生物学家对成熟的雄性鲸的测量, 其全长和吻尖到喷水孔的长度可近似地用一次函数表示.

在日常生活和生产实践中有不少问题的数量关系可以用一次函数来刻画. 在运用一次函数解决实际问题时, 首先判定问题中的两个变量之间是不是一次函数关系. 当确定是一次函数关系时, 可求出解析式, 并运用一次函数的图象和性质进一步求得我们所需要的结果.

确定两个变量是否构成一次函数关系的一种常用方法就是利用图象去获得经验公式, 这种方法的基本步骤是:

- 通过实验、测量获得数量足够多的两个变量的对应值;
- 建立合适的直角坐标系, 在坐标系内以各对应值为坐标描



点,并用描点法画出函数图象;

(3) 观察图象特征,判定函数的类型.

这样获得的函数解析式有时是近似的.

例 1 生物学家测得7条成熟的雄性鲸的全长 y 和吻尖到喷水孔的长度 x (图7-7)的数据如下表(单位:m):

| 吻尖到喷水孔的长度 x (m) | 1.78 | 1.91 | 2.06 | 2.32 | 2.59 | 2.82 | 2.95 |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 全长 y (m) | 10.00 | 10.25 | 10.72 | 11.52 | 12.50 | 13.16 | 13.90 |

问能否用一次函数刻画这两个变量 x 和 y 的关系? 如果能,请求出这个一次函数的解析式.



图 7-7

分析 在直角坐标系中画出以 (x, y) 为坐标的各点,观察这些点是否在或大致在一条直线上,从而判断 y 是不是关于 x 的一次函数. 如果是,就可以用待定系数法求出 y 关于 x 的函数解析式.

解 在直角坐标系中画出以表中 x 的值为横坐标, y 的值为纵坐标的7个点(如图7-8).

这7个点几乎在同一条直线上,所以所求的函数可以看成一次函数,即可用一次函数来刻画这两个量 x 和 y 的关系.

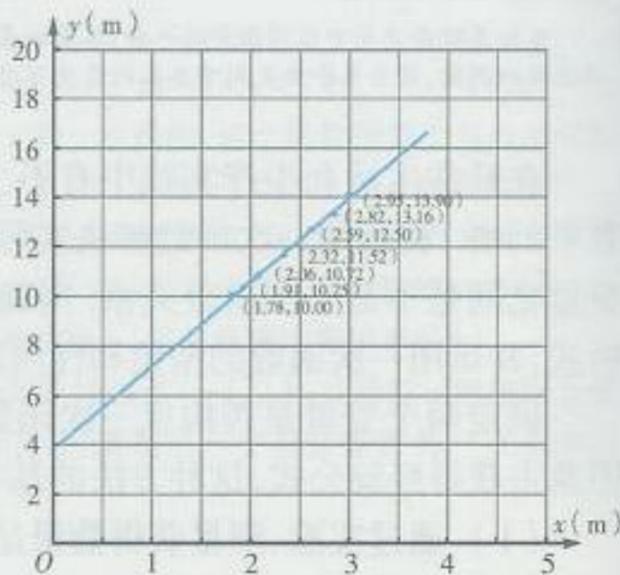


图 7-8

设这个一次函数为 $y=kx+b$.

把点 $(1.91, 10.25)$, $(2.59, 12.50)$ 的坐标分别代入 $y=kx+b$,

$$\text{得} \begin{cases} 10.25=1.91k+b, \\ 12.50=2.59k+b. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k \approx 3.31, \\ b \approx 3.93. \end{cases}$$

所以所求的函数解析式为 $y=3.31x+3.93$.

例 2 沙尘暴发生后,经过开阔荒漠时加速,经过乡镇、遇到防护林带区则减速,最终停止. 某气象研究所观察一场沙尘暴从发生到结束的全过程,记录了风速 y (km/h) 随时间 t (h) 变化的图象(如图7-9).



“三北”防护林带是黑龙江西部风沙干旱地区崛起的一道新的绿色长城.

- (1) 求沙尘暴的最大风速;
- (2) 用恰当的方式表示沙尘暴风速 y 与时间 t 之间的关系.

解 (1) 从图7-9可知,沙尘暴的最大风速为32 km/h.

(2) 从图7-9可知,

当 $0 \leq t \leq 4$ 时, y 与 t 成正比例关系.

设 $y=kt$, 直线 $y=kt$ 经过点 $(4, 8)$,

$$\therefore k=2, \text{ 即 } y=2t \quad (0 \leq t \leq 4);$$

当 $4 \leq t \leq 10$ 时, y 是 t 的一次函数.

设 $y=k_1t+b$, 直线 $y=k_1t+b$ 经过点 $(4, 8)$, $(10, 32)$,

$$\therefore \begin{cases} 4k_1+b=8, \\ 10k_1+b=32, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k_1=4, \\ b=-8. \end{cases}$$

$$\therefore y=4t-8 \quad (4 \leq t \leq 10).$$

当 $25 \leq t \leq 57$ 时, 用同样的方法可求得 $y=-t+57$ ($25 \leq t \leq 57$).

当 $10 \leq t \leq 25$ 时, $y=32$ ($10 \leq t \leq 25$), 即风速是一个常量32 km/h.

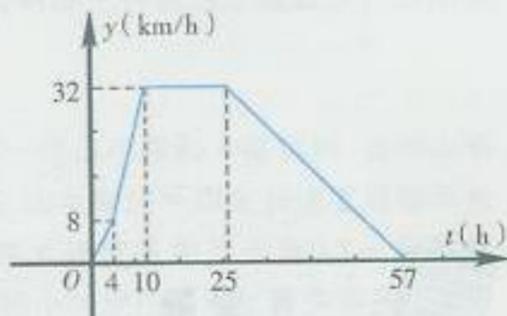


图 7-9

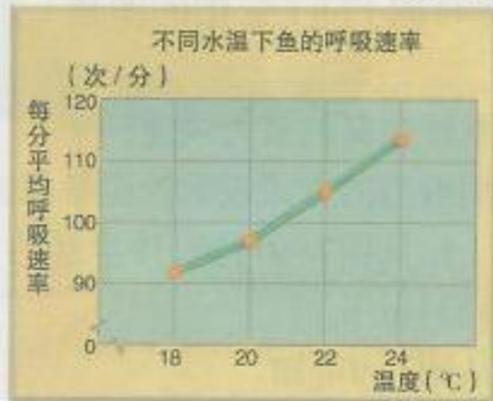


1. 通过实验获得 u, v 两个变量的各对应值如下表:

| | | | | | | | | |
|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| u | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 4 |
| v | 50 | 100 | 155 | 207 | 260 | 290 | 365 | 470 |

判断变量 u, v 是否近似地满足一次函数关系式. 如果是, 求 v 关于 u 的函数解析式, 并利用函数解析式求出当 $u=2.2$ 时, 函数 v 的值.

2. 科学家分别用5条金鱼做实验, 测试不同水温对“鱼的呼吸速率”(即开闭鳃盖的次数与时间的比)的影响, 得到如下统计图. 若设温度为 t ($^{\circ}\text{C}$), 平均呼吸速率为 v (次/分), 你能用恰当的方式表示 v 与 t 的关系吗?



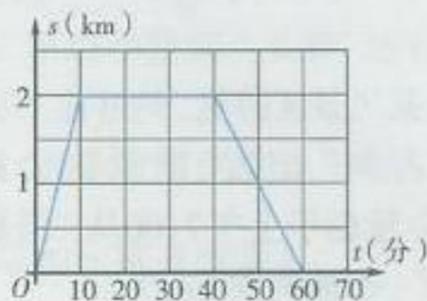
(第2题)



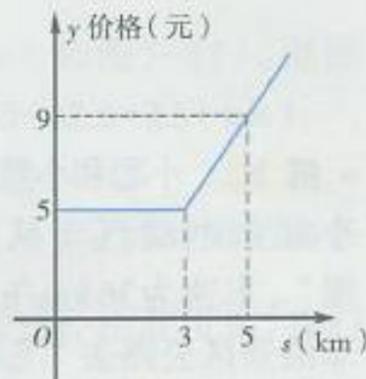
作业题
ZUOYETI

A组

1. 小聪上午8:00从家里出发, 骑车去一家超市购物, 然后从这家超市返回家中. 小聪离家的路程 s (km) 和所经过的时间 t (分) 之间的函数关系如图所示, 请根据图象回答下列问题:
- (1) 小聪去超市途中的速度是多少? 回家途中的速度是多少?
 - (2) 小聪在超市逗留了多少时间?
 - (3) 小聪在来去途中, 离家1 km处的时间是几时几分?



(第1题)



(第2题)

2. 某市出租车计费方法如图所示, 请根据图象回答下面的问题:
- (1) 出租车的起步价是多少元? 在多少路程内只收起步价费?
 - (2) 起步价里程走完之后, 每行驶1 km需多少车费?
 - (3) 某外地客人坐出租车游览本市, 车费为31元, 利用图象求出他乘车的里程.
3. 3名教师带领若干名学生去旅游, 联系了标价相同的两家旅游公司. 经洽谈, 甲公司给出的优惠条件是: 教师全额收费, 学生按7折收费; 乙公司给出的优惠条件是: 全部师生按8折收费. 选哪家公司师生付费的总额较少? 请用函数图象说明理由.

B组

4. 小明4岁那年父亲种下一棵山毛榉和一棵枫树. 当时山毛榉高2.4 m, 枫树高0.9 m. 山毛榉的平均生长速度是每年长高0.15 m, 枫树的平均生长速度是每年长高0.3 m. 现在枫树已经比山毛榉高了, 问小明现在的年龄至少有多少岁?



山毛榉



枫树

例 3 小聪和小慧去某风景区游览,约好在“飞瀑”见面.上午7:00,小聪乘电动汽车从“古刹”出发,沿景区公路(图7-10)去“飞瀑”,车速为36 km/h.小慧也于上午7:00从“塔林”出发,骑电动自行车沿景区公路去“飞瀑”,车速为26 km/h.

- (1) 当小聪追上小慧时,他们是否已经过了“草甸”?
- (2) 当小聪到达“飞瀑”时,小慧离“飞瀑”还有多少km?



电动汽车



电动自行车



图 7-10

解 设经过 t 时,小聪与小慧离“古刹”的路程分别为 s_1, s_2 ,由题意,得 $s_1=36t, s_2=26t+10$.

在直角坐标系中画出直线 $s_1=36t$ 和直线 $s_2=26t+10$ (如图7-11). 观察图象,得

(1) 两条直线 $s_1=36t, s_2=26t+10$ 的交点坐标为 $(1, 36)$, 所以当小聪追上小慧时, $s_1=s_2=36$ km, 即离“古刹”36 km, 已超过35 km, 也就是说, 他们已经过了“草甸”.

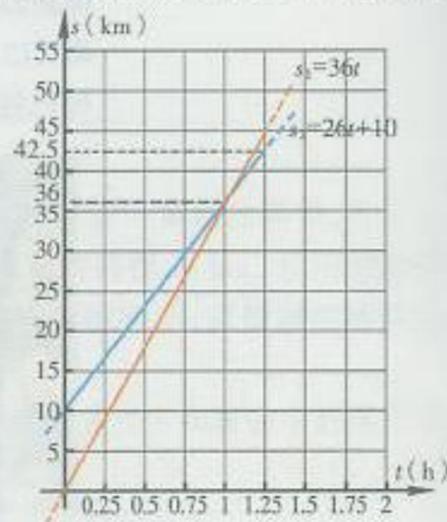


图 7-11

(2) 当小聪到达“飞瀑”时,即 $s_1=45$ km (如图7-11),由图7-11,得 $s_2=42.5$ km. 所以小慧离“飞瀑”还有 $45-42.5=2.5$ (km).

上例第(1)题中,两条直线的交点坐标 $(1, 36)$ 应同时满足两条直线的解析式,即是二元一次方程组 $\begin{cases} s=36t, \\ s=26t+10 \end{cases}$ 的解. 由此可见,我们可以用两个一次函数的图象,通过观察确定两条直线的交点的坐标值,求出由两个一次函数解析式组成的方程组的解. 注意,这样得到的解可能是近似解.



课内练习

KENEILIANXI

利用一次函数的图象,求下列二元一次方程组的解(或近似解):

$$(1) \begin{cases} 2x+y=0, \\ y=x+6; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x+y=2, \\ y=\frac{1}{2}x+1. \end{cases}$$

一次招聘会上, A, B两公司都在招聘销售人员. A公司给出的工资待遇是:每月1000元基本工资,另加销售额的2%作为奖金; B公司给出的工资待遇是:每月600元基本工资,另加销售额的4%作为奖金. 如果你去应聘,那么你将怎样选择?

建议:以2-4人为一组合作完成,按问题解决的4个步骤(理解问题、制定计划、执行计划、回顾)来解决问题. 其中制定计划这一步骤着重考虑数学模型(包括函数、图象、方程、不等式等)的选择和运用.



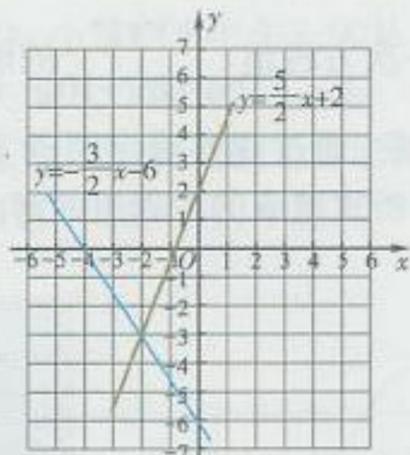


作业题

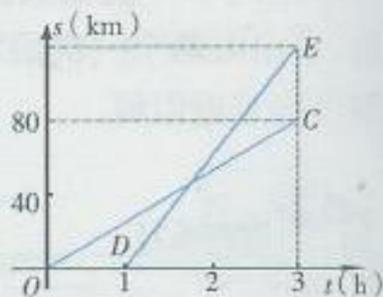
ZUOYETI

A组

1. 如图,由图象得 $\begin{cases} 5x-2y+4=0, \\ 3x+2y+12=0 \end{cases}$ 的解是_____.



(第1题)



(第2题)

2. 已知A,B两地相距80 km,甲、乙两人沿同一条公路从A地出发到B地,乙骑自行车,甲骑摩托车.图中DE,OC分别表示甲、乙离开A地的路程s(km)与时间t(h)的函数关系,根据图象填空:

- (1) 乙先出发,甲后出发,相差_____h;
- (2) 大约在乙出发后_____两人相遇,相遇地点离开A地_____km;
- (3) 甲到达B地时,乙在离A地_____km处;
- (4) 甲的速度为_____;乙的速度为_____;
- (5) 乙离开A地的路程s(km)与时间t(h)的函数解析式为_____;
- (6) 甲离开A地的路程s(km)与时间t(h)的函数解析式为_____.

3. 利用图象求下列方程组的近似解:

$$(1) \begin{cases} x-y=1, \\ 2x-3y=1; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} y=-\frac{1}{4}x+2, \\ x+y-1=0. \end{cases}$$

B组

4. 某商场要印制商品宣传材料,甲印刷厂的收费标准是:每

份材料收1元印制费,另收1500元制版费;乙印刷厂的收费标准是:每份材料收2.5元印制费,不收制版费.

- (1) 分别写出两厂的收费y(元)与印制数量x(份)之间的关系式;
- (2) 在同一直角坐标系中画出它们的图象;
- (3) 根据图象回答下列问题:印制800份宣传材料时,选择哪一家印刷厂比较合算?商场计划花费3000元用于印刷宣传材料,找哪一家印刷厂能印制宣传材料多一些?

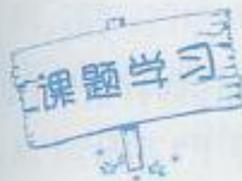


设计题

SHEJITI

在弹簧上悬挂物体,弹簧就会伸长.弹簧伸长的长度和悬挂物体的质量之间有什么函数关系?请以4~6人为一组探讨上述问题.建议:

1. 采用实验的方法,可找两三条生活或生产中使用的弹簧,在弹性限度内不断改变各条弹簧所挂物体的质量,量出相应的弹簧长度,并把记录的数据列成表格.
2. 通过观察数据,或以各组数据为坐标在直角坐标系内描点,来判别函数关系的类别,并求出函数解析式.
3. 就有关实验和探究过程以及发现的结果写一份简要的报告,并举例说明所发现在人们生活中的应用及意义.



怎样选择较优方案

某家电信公司提供了两种方案的移动通讯服务的收费标准,如下表:

表7-7

| | A方案 | B方案 |
|----------|------|------|
| 每月基本服务费 | 30元 | 50元 |
| 每月免费通话时间 | 120分 | 200分 |
| 超出后每分收费 | 0.4元 | 0.4元 |

如果请你选择其中一种方案,应如何选择?

建议从以下几方面考虑:

1. 在服务质量相同的情况下,人们通常根据什么来选择方案?
2. 每种方案每月付费金额与什么相关?
3. 怎样表示每月话费与通话时间的关系?

设每月通话时间为 x 分, A, B 两种方案每月话费分别为 y_1 元, y_2 元, 则

$$y_1 = \begin{cases} 30 & (0 \leq x \leq 120), \\ 30 + 0.4(x - 120) = 0.4x - 18 & (x > 120); \end{cases}$$
$$y_2 = \begin{cases} 50 & (0 \leq x \leq 200), \\ 0.4x - 30 & (x > 200). \end{cases}$$

在同一直角坐标系中画出图象,如图7-12.

观察图象得,

当 $0 \leq x < 170$ 时, $y_1 < y_2$, 应选择 A 方案;

当 $x = 170$ 时, $y_1 = y_2$, 两种方案可任选一种;

当 $x > 170$ 时, $y_1 > y_2$, 应选择 B 方案.

由此可见,如果从节省费用的角度考虑,当每月通话时间少于170分时,应选择 A 方案;大于170分时,应选择 B 方案;等于170分时, A, B 两方案可任选一种.

上例说明了数学中不等式、函数等知识在解决现实问题中的应用.你能运用上例所体现的数学思想和方法去解决一个现实生活中你所熟悉的或其他简单的实际问题吗?自己提出一个问题并尝试解决.

(请与同学合作进行)

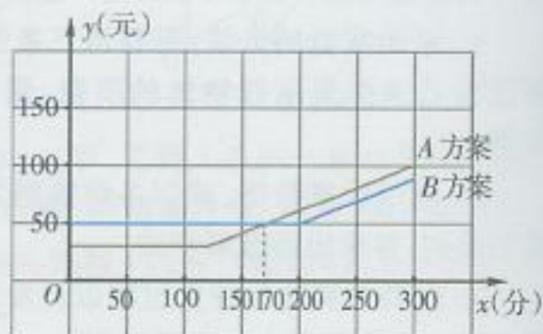


图 7-12

小 结

1. 在一个过程中,固定不变的量称为_____,可以取不同数值的量称为_____.

2. 设有两个变量 x, y , 如果对于 x 的_____的值, y 都有_____的值, 那么就说 y 是 x 的函数, x 叫做_____. 表示函数的三种方法是_____.

3. 函数 $y=kx+b$ (k, b 都是常数, 且 $k \neq 0$) 叫做_____. 当 $b=0$ 时, 函数 $y=kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 叫做_____, 常数 k 叫做_____.

4. 一次函数 $y=kx+b$ 的图象是一条直线. 该直线上的点 (x, y) 都满足关系式_____, 反过来, 坐标满足 $y=kx+b$ 的点都在该直线上.

5. 对于一次函数 $y=kx+b$ (k, b 为常数, 且 $k \neq 0$). 当 $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而_____; 当_____时, y 随 x 的增大而减小.

6. 主要方法和技能

(1) 用描点法作函数图象;

(2) 作一次函数的图象;

(3) 利用一次函数及其图象解决一些简单问题;

(4) 利用一次函数图象的交点, 求二元一次方程组的解(或近似解).

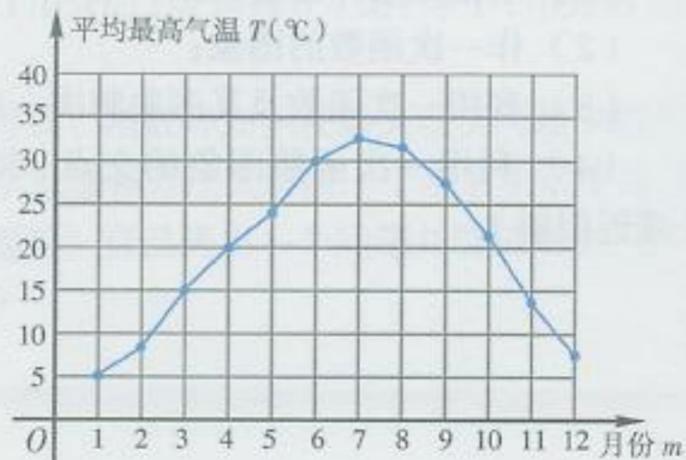


目标与评定

目标 1
(7.1节, 7.2节)

- 了解常量、变量和函数的概念,了解函数的三种表示方法.
- 会列简单实际问题的函数解析式,会求函数值和简单函数的自变量的取值范围.

1. 一列行驶中的火车的速度为每时160千米,用 t (时)表示行驶的时间, s (千米)表示行驶的里程.其中常量是_____,变量是_____, s 关于 t 的函数解析式是_____.当 $t=2.5$ 时,函数 s 的值是_____.
2. 寄一封20克以内的平信,需邮资0.8元,设寄 x 封这样的信,所需的邮资为 y 元,求:
 - (1) y 关于 x 的函数解析式和自变量 x 的取值范围;
 - (2) 当 $x=3$ 时的函数值,并说明此时函数值的实际意义.
3. 如图,设正方形的面积为 $(y-1)(\text{m}^2)$,边长为 $x(\text{m})$.
 - (1) 求 y 关于 x 的函数解析式和自变量 x 的取值范围;
 - (2) 分别求当 $x=5, 10$ 时,函数 y 的值.
4. 某城市12个月平均最高气温 $T(^\circ\text{C})$ 与月份 m 的函数关系如图.求该城市1月,7月的平均最高气温.



(第4题)

目标 2
(7.3节)

- 理解正比例函数、一次函数的概念.
 - 会求正比例函数、一次函数的解析式.
 - 会求一次函数的值,会根据已知一次函数的值求对应的自变量的值.
5. 设 y 是关于 x 的一次函数.当 $x=1$ 时, $y=-5$;当 $x=-2$ 时, $y=-20$.求:
 - (1) y 关于 x 的一次函数解析式;
 - (2) 当 $x=1.4$ 时, y 的值;
 - (3) 当 $y=\frac{10}{3}$ 时, x 的值.
 6. 图中两个时针的指针分别表示同一时刻的北京时间和东京时间.



北京时间



东京时间

(第6题)

设北京时间为 t (时),东京时间为 y (时),就 $0 \leq t \leq 12$ 的范围,分别求 y 关于 t 的函数解析式,并填写下表(同一时刻的两地时间):

| | | | |
|------|------|-------|------|
| 北京时间 | 8:30 | | 4:30 |
| 东京时间 | | 12:10 | |

7. 已知 s 是 t 的一次函数,且当 $t=8$ 时, $s=15$;当 $t=-10$ 时, $s=-3$.求:
 - (1) 这个一次函数的解析式;
 - (2) 当 $t=-1.14$ 时,相应的 s 的值.

目标 3
(7.4节)

- 了解一次函数图象的意义,会画一次函数的图象.
- 利用图象了解一次函数的性质,会根据自变量的取值范围求函数的取值范围;会根据函数的取值范围求自变量的取值范围.



8. 在同一直角坐标系中画下列函数的图象:

(1) $y = -\frac{3}{7}x$; (2) $y = 8x - 4$; (3) $y = -3x + 6$.

9. 已知 $(-1, y_1)$, $(-0.5, y_2)$, $(1.7, y_3)$ 是直线 $y = -9x + b$ (b 为常数) 上的三个点, 则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是 ()

(A) $y_3 > y_2 > y_1$. (B) $y_1 > y_2 > y_3$.

(C) $y_1 > y_3 > y_2$. (D) $y_3 > y_1 > y_2$.

10. 已知 y 与 $x + b$ 成正比例, 且当 $x = 4$ 时, $y = 6$; 当 $x = 2$ 时, $y = 2$.

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 若 $-2 < y < 8$, 求 x 的取值范围.

11. 春天到了, 某服装店将冬装一律4折(原价的40%)出售.

估算一件原价300~350元的冬装现价为多少元. 你能用正比例函数的增减性说明理由吗?

目标 7

(7.5 节)

● 会用函数图象刻画两个变量之间的关系.

● 会根据一次函数图象求二元一次方程的解(或近似解).

● 初步具有综合运用知识解决实际问题的能力.

12. 利用函数图象求下列方程组的近似解:

(1) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y = \frac{7}{2}x - 4, \\ 3y - x - 7 = 0. \end{cases}$

13. 小明放学骑车回家过程中, 路程 s 与时间 t 的关系如图. 请根据图象回答下面的问题:

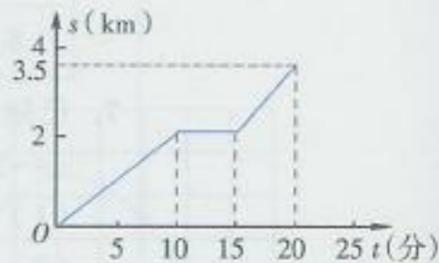
(1) 用解析式表示全过

程中 s 与 t 的关系;

(2) 小明回家途中有没有停留? 停留多少时间?

(3) 开始10分时间内的速度是多少? 最后5分时间内呢?

(4) 经15分后离家路程还有多远?



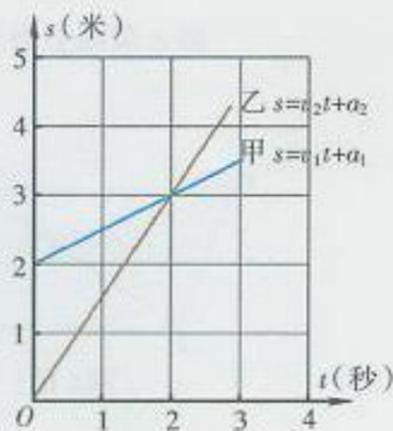
(第13题)

14. 已知甲、乙两物体沿同一条直线同时、同向匀速运动, 它们所经过的路程 s 与所需时间 t 之间的函数解析式分别为 $s = v_1t + a_1$ 和 $s = v_2t + a_2$, 图象如图所示.

(1) 说出甲、乙两物体的初始位置, 并说明开始时谁前谁后?

(2) 哪个物体运动得快一些? 从物体运动开始, 2秒以前谁先谁后? 2秒时呢? 2秒以后呢?

(3) 求 v_1, v_2 的值, 并写出两个函数解析式.



(第14题)

15. 酒精的体积与温度之间的关系在一定范围内近似地符合一次函数关系. 现测得一定量的酒精在 0°C 时的体积是 5.250L , 在 40°C 时的体积是 5.481L .

(1) 估算这些酒精在 $20\sim 30^\circ\text{C}$ 时的体积(精确到 0.001L);

(2) 如果用容积为 5.3L 的容器来盛这些酒精, 为了不使酒精溢出, 酒精的温度应保持在多少摄氏度(精确到 1°C)?