

函数知识点总结

一、映射与函数

1、映射 $f: A \rightarrow B$ 概念

- (1) A 中元素必须都有象且唯一；
- (2) B 中元素不一定都有原象，但原象不一定唯一。

例如、设 $f: M \rightarrow N$ 是集合 M 到 N 的映射，下列说法正确的是 ()

- (A) M 中每一个元素在 N 中必有象
- (B) N 中每一个元素在 M 中必有原象
- (C) N 中每一个元素在 M 中的原象是唯一的
- (D) N 是 M 中所有元素的象的集合

2、函数 $f: A \rightarrow B$ 是特殊的映射

(1)、特殊在定义域 A 和值域 B 都是非空数集。函数 $y=f(x)$ 是“ y 是 x 的函数”这句话的数学表示，其中 x 是自变量， y 是自变量 x 的函数， f 是表示对应法则，它可以是一个解析式，也可以是表格或图象，也有只能用文字语言叙述。由此可知函数图像与 x 轴至多有一个公共点，但与 y 轴的公共点可能没有，也可能是任意个。

(2)、函数三要素是定义域，对应法则和值域，而定义域和对应法则是起决定作用的要素，因为这二者确定后，值域也就相应得到确定，因此只有定义域和对应法则二者完全相同的函数才是同一函数。

二、反函数

反函数定义：只有满足 $x \xrightarrow{\text{唯一}} y$ ，函数 $y=f(x)$ 才有反函数。函数 $y=f(x)$ 的反函数记为 $x=f^{-1}(y)$ ，

习惯上记为 $y=f^{-1}(x)$ 。在同一坐标系，函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于 $y=x$ 对称。
注：

1、对于任意一个函数 $y=f(x)$ 不一定有反函数。单调函数才具有反函数。但并非反函数存在时一定是单调的。因此，所有偶函数不存在反函数。

2、原函数的定义域是反函数的值域，原函数的值域是反函数的定义域，在求反函数时，应先确定原函数的值域。

3、求反函数的步骤是“一解”“二换”。所谓一解，即是首先由给出原函数的解析式 $y=f(x)$ ，反解出表示 x 的式子 $x=f^{-1}(y)$ ；二换，即是将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x, y 两个字母互换，解到 $y=f^{-1}(x)$ 即为所求的反函数

(即先解后换)。当然，在同一直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 是表示同一图象， $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。

4、函数 $y=f(x)$ 、 $y=f^{-1}(x)$ 、 $x=f(y)$ 、 $x=f^{-1}(y)$ 间的关系：

$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 、 $x=f(y)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数；

$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 、 $x=f(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 为同一函数。

三、函数的单调性

它是一个区间概念，即函数的单调性是针对定义域内的区间而言的。方法如下：

1、作差（商）法（定义法）

2、导数法

3、复合函数单调性判别方法（同增异减）

四、函数的奇偶性

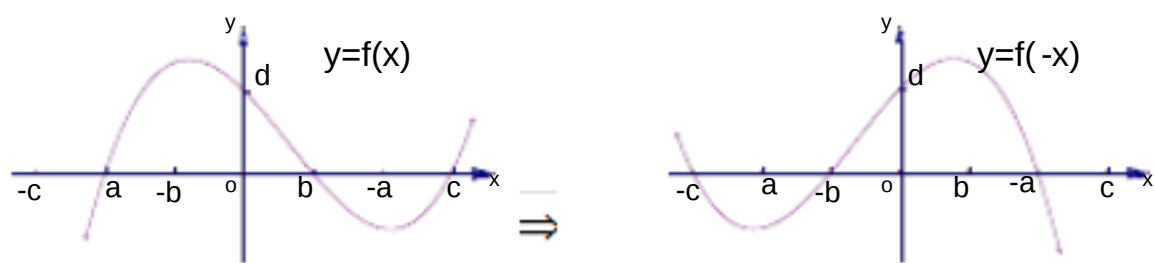
偶函数： $f(-x) = f(x)$
设 (a, b) 为偶函数上一点，则 $(-a, b)$ 也是图象上一点。
偶函数的判定：两个条件同时满足
定义域一定要关于 y 轴对称，例如： $y = x^2 + 1$ 在 $[1, -1)$ 上不是偶函数。
满足 $f(-x) = f(x)$ ，或 $f(-x) - f(x) = 0$ ，若 $f(x) \neq 0$ 时， $\frac{f(x)}{f(-x)} = 1$ 。

奇函数： $f(-x) = -f(x)$
设 (a, b) 为奇函数上一点，则 $(-a, -b)$ 也是图象上一点。
奇函数的判定：两个条件同时满足

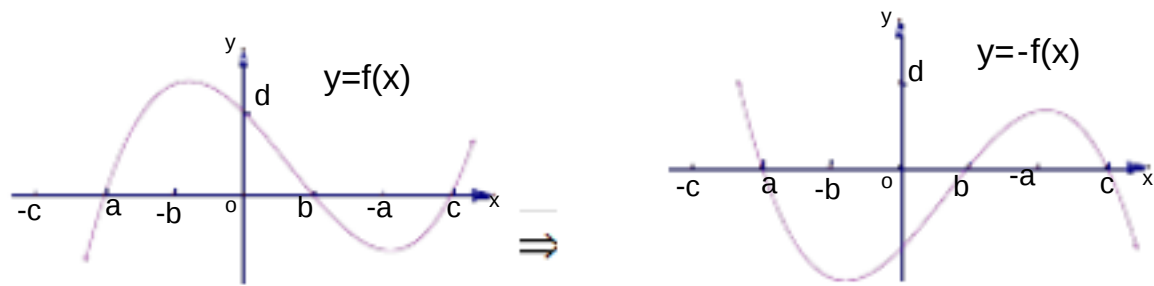
定义域一定要关于原点对称，例如： $y = x^3$ 在 $[1, -1)$ 上不是奇函数。
满足 $f(-x) = -f(x)$ ，或 $f(-x) + f(x) = 0$ ，若 $f(x) \neq 0$ 时， $\frac{f(x)}{f(-x)} = -1$

五、函数的变换

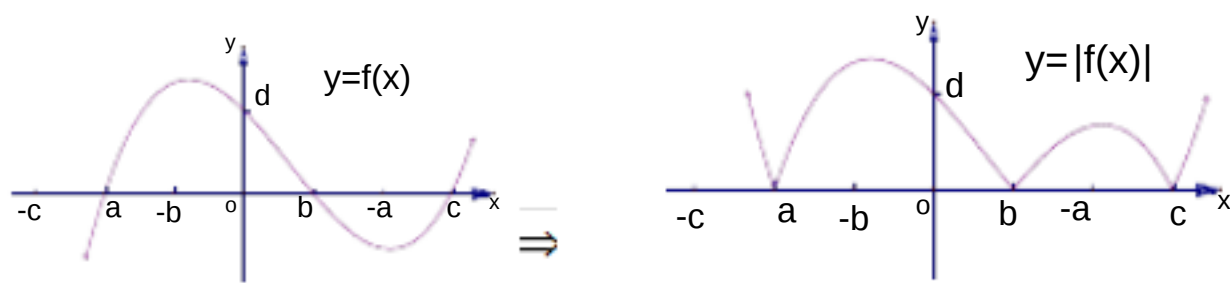
$y = f(x) \xrightarrow{\text{关于y轴对称}} y = f(-x)$ ：将函数 $y = f(x)$ 的图象关于 y 轴对称得到的新的图像就是 $y = f(-x)$ 的图像；



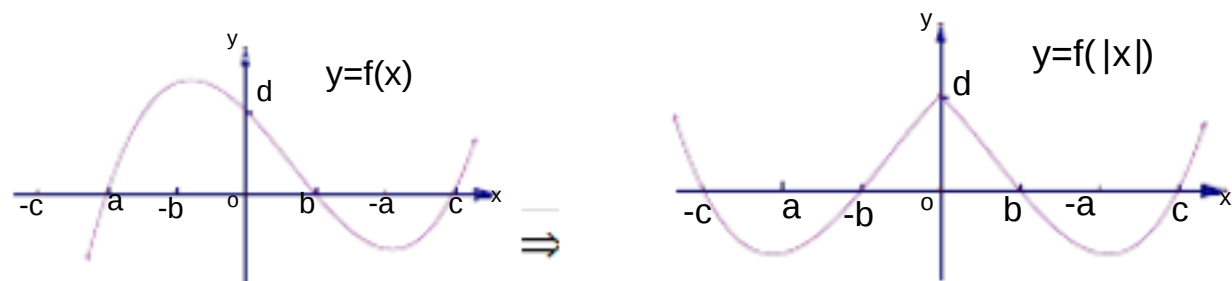
$y = f(x) \xrightarrow{\text{关于x轴对称}} y = -f(x)$ ：将函数 $y = f(x)$ 的图象关于 x 轴对称得到的新的图像就是 $y = -f(x)$ 的图像；



$y = f(x) \xrightarrow{\text{关于x轴上方}} y = |f(x)|$ ：将函数 $y = f(x)$ 的图象在 x 轴下方的部分对称到 x 轴的上方，连同函数 $y = f(x)$ 的图象在 x 轴上方的部分得到的新的图像就是 $y = |f(x)|$ 的图像；



$y = f(x) \Rightarrow y = f(|x|)$: 将函数 $y = f(x)$ 的图象在 y 轴左侧的部分去掉，函数 $y = f(x)$ 的图象在 y 轴右侧的部分对称到 y 轴的左侧，连同函数 $y = f(x)$ 的图象在 y 轴右侧的部分得到的新的图像就是 $y = f(|x|)$ 的图像 .



函 数	$y=f(x)$
$y=f(x+a)$	$a>0$ 时，向左平移 a 个单位； $a<0$ 时，向右平移 $ a $ 个单位 .
$y=f(x)+a$	$a>0$ 时，向上平移 a 个单位； $a<0$ 时，向下平移 $ a $ 个单位 .
$y=f(-x)$	$y=f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称 .
$y=-f(x)$	$y=-f(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于 x 轴对称 .
$y=-f(-x)$	$y=-f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于原点轴对称 .
$y=f(x)$	$y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称， $x \geq 0$ 时函数即 $y=f(x)$ ，所以 $x<0$ 时的图象与 $x \geq 0$ 时 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称 .
$y= f(x) $	$y = f(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0; \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$ $y= f(x) $ 的图 象 是 $y=f(x) \geq 0$ 与 $y=f(x)<0$ 图象的组合 .
$y= f^{-1}(x)$	$y= f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称 .

注：

- (1) 若对任意实数 x , 都有 $f(a+x)=f(a-x)$ 成立，则 $x=a$ 是函数 $f(x)$ 的对称轴；
- (2) 若对任意实数 x , 都有 $f(a+x)=f(b-x)$ 成立，则 $x=\frac{a+b}{2}$ 是 $f(x)$ 的对称轴 .

六、指数函数与对数函数的图像和性质

- 指数运算公式：
- 1．根式的运算性质：

当 n 为任意正整数时， $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

当 n 为奇数时， $\sqrt[n]{a^n}=a$ ；当 n 为偶数时， $\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases} a(a \geq 0) \\ -a(a < 0) \end{cases}$.

根式的基本性质： $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}, (a \geq 0)$.

- 2．分数指数幂的运算性质：

对数运算公式：

- 1．对数的定义 $\log_a N =b$ 其中 $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ 与 $N \in (0,+\infty)$.

2. 指数式与对数式的互化 .

$$\begin{array}{ccc} \textcolor{red}{a}^{\textcolor{red}{b}} = \textcolor{red}{N} & \Leftrightarrow & \textcolor{blue}{\log}_a \textcolor{blue}{N} = \textcolor{blue}{b} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \textcolor{green}{底数} \quad \textcolor{green}{指数} \quad \textcolor{green}{幂} & & \textcolor{green}{底数} \quad \textcolor{green}{真数} \quad \textcolor{green}{对数} \end{array}$$

3. 重要公式：

负数与零没有对数；

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1.$$

$$\text{对数恒等式} \quad a^{\log_a N} = N.$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \in \mathbb{R})$$

3. 指数运算法则 $(a^m)^n = a^{mn} \quad (m, n \in \mathbb{R})$.

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N \quad (^{(1)})$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^n = n \log_a (\textcolor{blue}{\pm} M) \quad (^{(2)})$$

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$$

$$a^{\log_a N} = N$$

$$\text{换底公式:} \quad \log_a N = \frac{\log N}{\log a}$$

$$\text{推论:} \quad \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$$

$$\Rightarrow \log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \dots \cdot \log_{a_{n-1}} a_n = \log_{a_1} a_n$$